

Examen du 18 Janvier 2011

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1 : Système de Lorenz (4 points)

Le système de Lorenz est le premier exemple de système dynamique dérivé d'un phénomène physique (la dynamique de l'atmosphère) et présentant un comportement chaotique. Une formulation est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

où les 3 paramètres σ , β et ρ sont positifs.

1. Déterminer les points fixes du système.
2. Calculer le Jacobien du système.
3. Déterminer la stabilité du point fixe trivial en fonction de ρ , pour σ et β fixés.

Lorenz system is the first dynamical system derived from a model of a physical system (dynamics of the atmosphere) that exhibits chaos. It reads :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

where the 3 parameters σ , β and ρ are greater than 0.

1. *Compute all fixed points to this system.*
2. *Compute its Jacobian matrix.*
3. *Determine the stability condition for the trivial fixed point as a function of ρ , if σ and β are fixed.*

Exercice 2 : Tamis de Sierpinski (2 points)



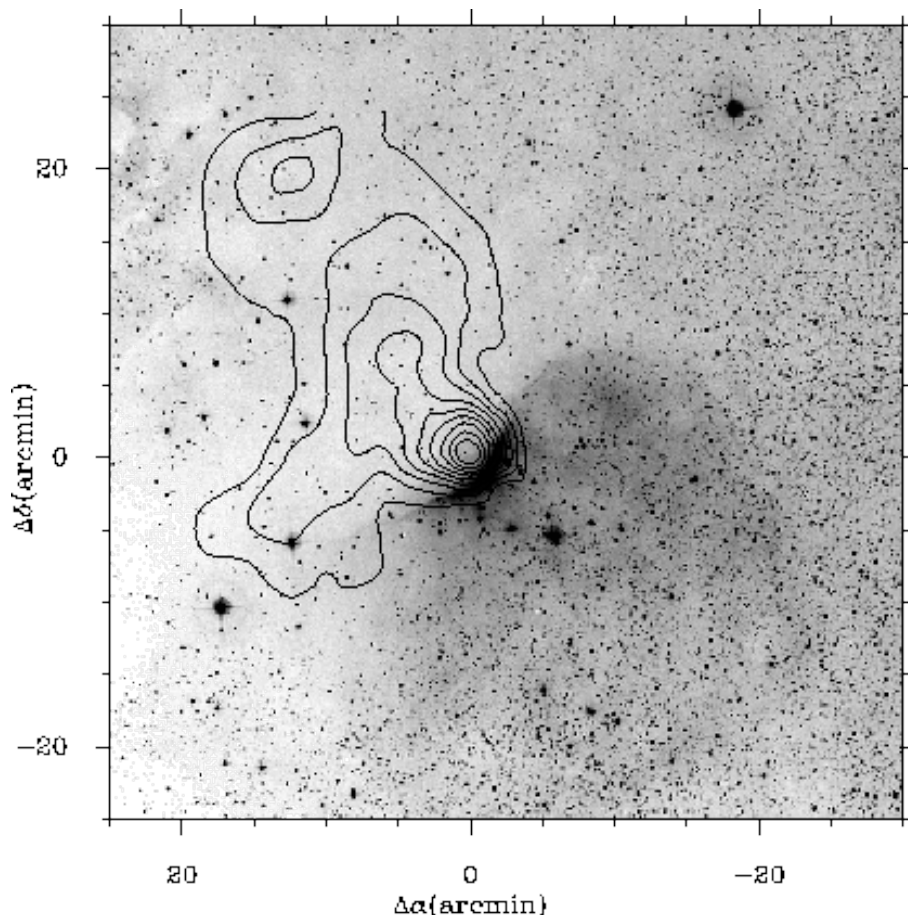


FIGURE 1 – L 1204 / S140 d’après Stark & Reif (1998).

Le tamis de Sierpinski est un des fractals les plus classiques. On peut le construire (entre autre) en partant d’un triangle isocèle que l’on découpe en 4 parties égales et en supprimant le triangle central, puis en recommençant sur chacun des trois triangles restant. Cette opération est itérée indéfiniment.

Quelle est la dimension fractale de la figure résultante ?

Sierpinski gasket is one of the classical example of a fractal set. It can be built from a triangle by removing recursively the central triangle (see figure).

What is the fractal dimension of the final set ?

Exercice 3 : Turbulence Interstellaire (6 points)

La Figure (1) montre la région de L 1204 / S140 en infrarouge (bande R). Le nuage moléculaire est situé en haut à gauche de l’image et est matérialisé par les isocontours de la transition $J = 2 \rightarrow 1$ de la molécule ^{13}CO . Cette raie en émission peut être considérée comme “raisonnablement” transparente. Quelques raies d’émission provenant de cette région sont illustrées sur la Figure (2).

Le nuage est situé à $d = 940 \text{ pc}$ du Soleil. On rappelle que $1 \text{ pc} \simeq 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}$, $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$.

1. D’après la carte (Figure (1)), estimer une taille typique en cm du nuage.

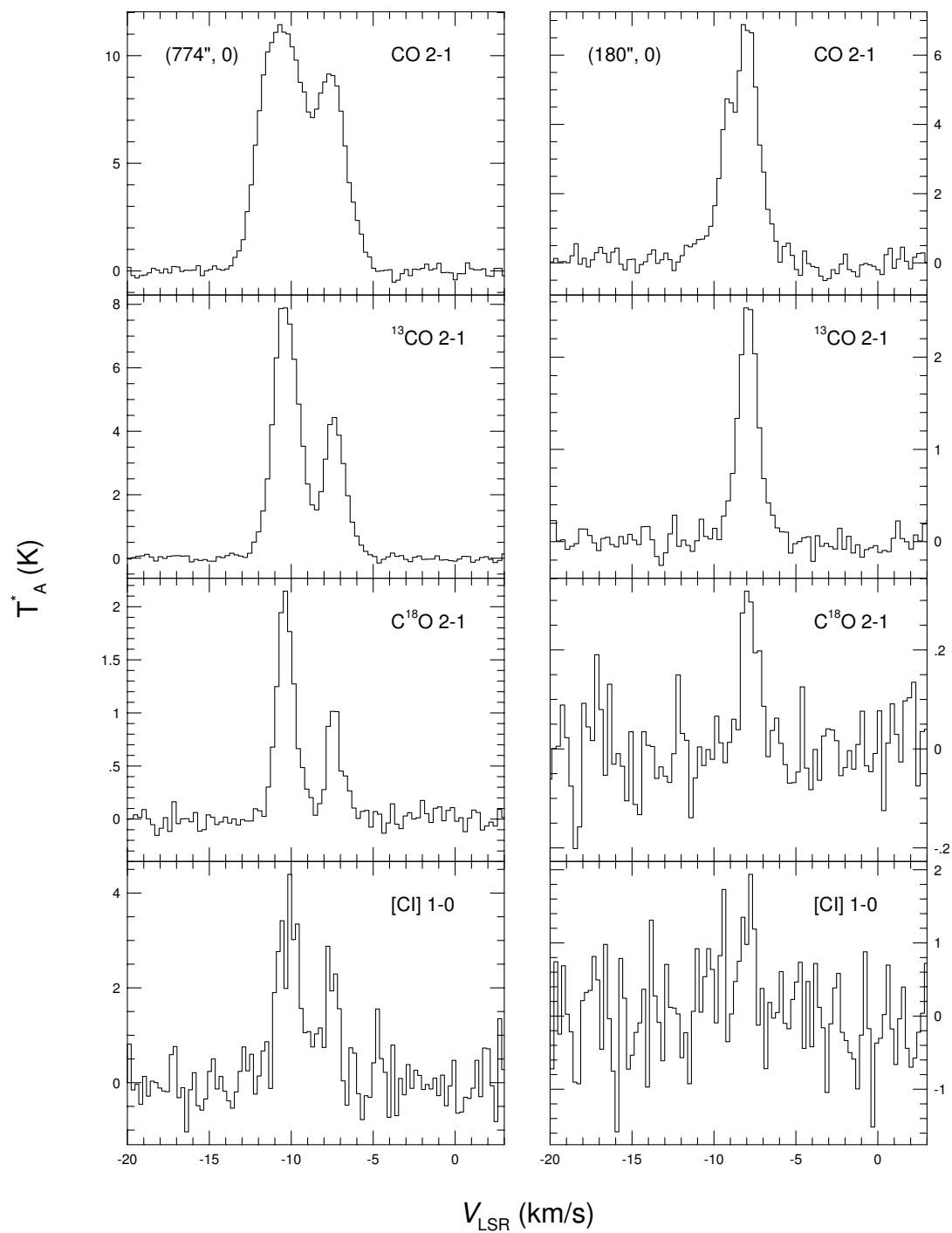


FIGURE 2 – Raies d'émission de la région de L 1204, d'après Li et al.(2002).

2. En utilisant la raie de ^{13}CO , $(2 - 1)$, estimer la dispersion de vitesse dans le nuage.
3. En déduire une valeur typique du nombre de Reynolds dans cet objet (On pourra utiliser l'évaluation de ν figurant dans le poly).
4. Déterminer la taille (en cm et en pc) de l'échelle de dissipation de Kolmogorov.
5. Sachant que la fréquence de la raie de ^{13}CO est $\nu_c \simeq 220$ GHz, quelle taille de télescope faudrait-il pour résoudre la région de dissipation ? Commentez.

Figure (1) shows the L 1204 / S140 cloud in infrared (band R). The molecular cloud is in the upper left corner, outlined by $^{13}\text{CO } J = 2 \rightarrow 1$ emission line isocontours. This emission line can be considered "fairly" transparent. Some emission lines from this region are seen on Figure (2).

The distance to the cloud is $d = 940$ pc. $1 \text{ pc} \simeq 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}$, $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$.

1. From Figure (1), estimate a typical size of the cloud in cm.
2. From ^{13}CO , $(2 - 1)$ line, estimate the cloud velocity dispersion.
3. Deduce a typical value of the Reynolds number in this object (use the value of ν from the course).
4. What is the Kolmogorov dissipation scale (in cm and pc).
5. $^{13}\text{CO } (2 - 1)$ central frequency is about $\nu_c \simeq 220$ GHz. What telescope diameter is required to resolve the dissipation scale ? Comment.

Exercice 4 : Solution numérique de l'équation de Navier-Stokes¹ (8 points)

Si $U^{(n)}$ est l'approximation numérique d'un champ de vitesse $U(t)$ à l'instant $t = n \Delta t$, une méthode de résolution de l'équation de Navier-Stokes incompressible est la suivante² :

– Étape 1 :

$$\hat{U}_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} + \Delta t \left(\nu \frac{\partial^2 U_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_i} - U_i^{(n)} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

– Étape 2 :

$$U_j^{(n+1)} = \hat{U}_j^{(n+1)} - \Delta t \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j} \quad (2)$$

où $\phi(x)$ est un champ scalaire à déterminer.

On rappelle que :

$$\nabla^2 U = \nabla (\nabla U) - \nabla \wedge (\nabla \wedge U)$$

1. D'après Pope, "Turbulent Flows", (2000).

2. Rappel : Les trois indices spatiaux sont notés i, j, k . Les indices doublés indiquent une sommation (convention d'Einstein).

1. Montrer que si $\nabla U = 0$, alors la composante j du Laplacien de U est :

$$\left(\nabla^2 U\right)_j = \frac{\partial U_j}{\partial x_i \partial x_i}$$

2. Quel est le lien entre l'Eq (1) et l'équation de Navier-Stokes ?
 3. En supposant que $\nabla U^{(n)} = 0$, déduire de l'Eq (1) une expression de la divergence de $\hat{U}^{(n+1)}$ en fonction de $U^{(n)}$.
 4. Déduire de l'Eq (2) une expression de la divergence de $U^{(n+1)}$.
 5. Déduire des questions 3 et 4 que l'on ne peut avoir $\nabla U^{(n+1)} = 0$ que si et seulement si le champ $\phi^{(n)}$ satisfait à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \phi^{(n)} = -\frac{\partial U_k^{(n)}}{\partial x_j} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_k}$$

6. Quel est le lien entre le champ $\phi^{(n)}(x)$ et la pression ?

Let $U^{(n)}$ be a numerical approximation to a velocity field $U(t)$ at time $t = n \Delta t$. A numerical method to solve the incompressible Navier-Stokes equation is³ :

- Step 1 :

$$\hat{U}_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} + \Delta t \left(\nu \frac{\partial^2 U_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_i} - U_i^{(n)} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i} \right)$$

- Step 2 :

$$U_j^{(n+1)} = \hat{U}_j^{(n+1)} - \Delta t \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j}$$

where $\phi(x)$ is a scalar field to be determined.

Remember that :

$$\nabla^2 U = \nabla (\nabla U) - \nabla \wedge (\nabla \wedge U)$$

1. Show that if $\nabla U = 0$, then component j of the Laplacian of U is :

$$\left(\nabla^2 U\right)_j = \frac{\partial U_j}{\partial x_i \partial x_i}$$

2. What is the link between Eq (1) and Navier-Stokes equation ?
 3. Admit that $\nabla U^{(n)} = 0$. Then deduce from Eq (1) an expression for the divergence of $\hat{U}^{(n+1)}$ as a function of $U^{(n)}$.
 4. Derive from Eq (2) an expression for the divergence of $U^{(n+1)}$.
 5. From questions 3 and 4 show that $\nabla U^{(n+1)} = 0$ if and only if the field $\phi^{(n)}$ is a solution to a Poisson equation :

$$\nabla^2 \phi^{(n)} = -\frac{\partial U_k^{(n)}}{\partial x_j} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_k}$$

6. What is the link between $\phi^{(n)}(x)$ and pressure ? Comment.

3. note : Space index are written i, j, k . Repeated indices stand for a summation (Einstein convention).

Corrigé :

Exercice 1 : Système de Lorenz

1. Les points fixes sont tels que :

$$\begin{cases} \sigma (y - x) & = 0 \\ \rho x - y - xz & = 0 \\ -\beta z + xy & = 0 \end{cases}$$

Donc, il y a un point fixe "trivial" $x = y = z = 0$ et deux points fixes symétriques en :

$$\begin{aligned} x &= y = \pm \sqrt{\beta (\rho - 1)} \\ z &= \rho - 1 \end{aligned}$$

2. Matrice Jacobienne :

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

3. Matrice Jacobienne en $(0, 0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

La matrice étant factorisée par blocs, on voit tout de suite qu'une des valeurs propre est $\lambda = -\beta$. Les deux autres sont racine de :

$$\lambda^2 + (\sigma + 1) \lambda + \sigma (1 - \rho) = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma (1 - \rho)} \right)$$

On a une valeur $\lambda_+ > 0$ si $-4\sigma (1 - \rho) > 0$, soit $\rho > 1$. Donc :

- Si $\rho < 1$: l'origine est un point fixe stable.
- Si $\rho > 1$: l'origine est un point fixe instable.

Exercice 2 : Tamis de Sierpinski

En utilisant des "pavés" triangulaires, à chaque étape de l'itération le nombre de pavés est multiplié par 3 et la surface de chacun est divisée par 4 (le côté a sa longueur divisée par 2). Partant d'un côté de taille initiale l_0 , on a donc la suite :

| n | l_n | N_n |
|-----|-------------------|-------|
| 0 | l_0 | 1 |
| 1 | $\frac{l_0}{2}$ | 3 |
| 2 | $\frac{l_0}{2^2}$ | 3^2 |
| 3 | $\frac{l_0}{2^3}$ | 3^3 |

On voit que partant d'une longueur l_0 à l'étape 0, à l'étape n , il faut 3^n pavés de longueur $l_n = \frac{l_0}{2^n}$. Si on écrit :

$$N_n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D$$

on a :

$$3^n = (2^n)^D$$

$$\log 3 = D \log (2)$$

Donc :

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Exercice 3 : Turbulence Interstellaire

1. Sur la carte, on peut estimer la taille caractéristique du nuage à 15 minutes d'arc, soit environ $4.4 \cdot 10^{-3}$ radians. A 940 pc, cela fait environ $L \sim 4$ pc, soit $L \sim 1.2 \cdot 10^{19}$ cm. On fait ici l'hypothèse que toutes les dimensions caractéristiques du nuage sont comparables, et donc que la longueur d'intégration le long de la ligne de visée est du même ordre de grandeur.
2. On lit directement la largeur à mi-hauteur de la raie sur la figure : $v_L \sim 2.5 \text{ km s}^{-1} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$. On fait ici l'hypothèse que la raie est mince et donc que sa largeur est dominée par la dispersion de vitesse le long de la ligne de visée sur toute l'épaisseur du nuage. Note : la raie de ^{12}CO , $(2-1)$ est visiblement épaisse, et sa largeur ne donne donc pas directement une évaluation de la dispersion de vitesse. La raie de C^{18}O , $(2-1)$, elle, n'échantillonne que le coeur du nuage et n'est donc pas caractéristique de l'échelle intégrale.
3. Si on adopte une viscosité cinématique de l'ordre de $10^{15} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, on obtient :

$$Re = \frac{L v_L}{\nu} \sim \frac{1.2 \cdot 10^{19} \cdot 2.5 \cdot 10^5}{10^{15}} \sim 3 \cdot 10^9$$

4. L'échelle de Kolmogorov est donnée par :

$$\eta = L (Re)^{-3/4} \sim 10^{12} \text{ cm} \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ pc}$$

5. La longueur d'onde de la raie est de :

$$\lambda = \frac{c}{\nu_c} = \frac{3 \cdot 10^8}{220 \cdot 10^9} \simeq 0.14 \text{ cm}$$

L'échelle de dissipation est donc vue, à la distance de l'objet, sous un angle de $\sim 3 \cdot 10^{-10}$ radians. La résolution spatiale d'un télescope étant de l'ordre de λ/D , pour résoudre cette échelle il faudrait un diamètre de

$$D \sim \frac{0.15}{3 \cdot 10^{-10}} \sim 5 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

soit environ le rayon de la Terre!

Les évaluations ci-dessus sont très grossières. On ne doit donc pas y voir plus qu'un ordre de grandeur typique. Mais même si on s'est trompé d'un facteur 10, on voit que l'échelle de dissipation n'est accessible qu'à l'aide de techniques de type VLBI, telles qu'elles sont déjà pratiquées dans le domaine centimétrique (avec la raie à 21 cm de l'hydrogène par exemple), mais pas encore dans le domaine millimétrique.

Exercice 4 : Solution numérique de l'équation de Navier-Stokes

1. L'expression du Laplacien est :

$$\nabla^2 U = \nabla (\nabla U) - \nabla \wedge (\nabla \wedge U)$$

Avec $\nabla U = 0$, on a :

$$\nabla^2 U = -\nabla \wedge (\nabla \wedge U)$$

Le rotationnel de U s'écrit :

$$\nabla \wedge U = \begin{cases} \partial_j U_k - \partial_k U_j \\ \partial_k U_i - \partial_i U_k \\ \partial_i U_j - \partial_j U_i \end{cases}$$

Donc, en reprenant le rotationnel de cette expression, on a pour la deuxième composante (Attention : ici les indices doublés n'indiquent **pas** une sommation!) :

$$(\nabla \wedge (\nabla \wedge U))_j = \partial_k (\partial_j U_k - \partial_k U_j) - \partial_i (\partial_i U_j - \partial_j U_i)$$

$$(\nabla \wedge (\nabla \wedge U))_j = \partial_j \partial_k U_k + \partial_j \partial_i U_i - \partial_k \partial_k U_j - \partial_i \partial_i U_j$$

En ajoutant et retranchant la même quantité ($\partial_j \partial_j U_j$), on obtient :

$$(\nabla \wedge (\nabla \wedge U))_j = \partial_j (\partial_k U_k + \partial_i U_i + \partial_j U_j) - \partial_j \partial_j U_j - \partial_k \partial_k U_j - \partial_i \partial_i U_j$$

$$(\nabla \wedge (\nabla \wedge U))_j = -\partial_j \partial_j U_j - \partial_k \partial_k U_j - \partial_i \partial_i U_j$$

en utilisant toujours le fait que la divergence de la vitesse est nulle. On a donc bien (avec de nouveau la convention de sommation) :

$$(\nabla^2 U)_j = \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_i}$$

2. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 U$$

Pour une composante (j par exemple), on a :

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \left(U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_i}$$

Si on approxime la dérivée temporelle par son expression au premier ordre, on obtient :

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} \simeq \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} P + \nu \frac{\partial U_j}{\partial x_i \partial x_i} - \left(U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ U_j^{(n+1)} &= U_j^{(n)} + \Delta t \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} P + \nu \frac{\partial U_j}{\partial x_i \partial x_i} - \left(U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

En évaluant les vitesses à l'instant (n) , et en négligeant le terme en gradient de pression, on obtient bien l'Eq (1). Par différence, on trouve donc :

$$U_j^{(n+1)} = \hat{U}_j^{(n+1)} - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} P$$

3. A partir de l'Eq (1), on trouve pour la divergence de $\hat{U}^{(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{U}^{(n+1)} &= \frac{\partial \hat{U}_j^{(n+1)}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_j^{(n)} + \Delta t \left[\nu \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_i} - \left(U_i^{(n)} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right] \right) \\ &= \Delta t \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_i^{(n)} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= -\Delta t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé deux fois le fait que $\nabla \hat{U}^{(n)} = 0$.

4. A partir de l'Eq (2), on trouve pour la divergence de $U^{(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \nabla U^{(n+1)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{U}_j^{(n+1)} - \Delta t \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j} \right) \\ \nabla U^{(n+1)} &= \nabla \hat{U}^{(n+1)} - \Delta t \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= -\Delta t \left(\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_j} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{aligned}$$

5. On ne peut donc avoir $\nabla U^{(n+1)} = 0$ que si :

$$\frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_j \partial x_j} = \nabla^2 \phi^{(n)} = -\frac{\partial U_i^{(n)}}{\partial x_j} \frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial x_i}$$

qui est bien une équation de Poisson.

6. Par identification, on trouve que ce champ $\phi(x)$ doit représenter le rapport $\frac{P(x)}{\rho}$, qui est à calculer à chaque pas de temps. L'évolution se fait donc en trois temps :

- (a) On fait évoluer le champ de vitesse en utilisant une expression sans le terme de pression.
- (b) On calcule la nouvelle pression en résolvant l'équation de Poisson associée.
- (c) On ajoute alors le terme de gradient de pression à la vitesse.