Examen du 11 Janvier 2012

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés. L'examen comporte les exercices 1, 2 et la partie C de l'exercice 3. Les parties A et B de celui-ci doivent être considérées comme des compléments de cours à admettre. Le barème est indicatif et sera revu (et ramené sur 20) en fonction du contenu des copies.

Exercice 1 : Système de Hénon-Heiles (6 points)

Ce système est un exemple classique, utilisé pour modéliser les trajectoires d'étoiles au voisinage du centre d'une galaxie (dans le plan $x - y$). Il est défini par :

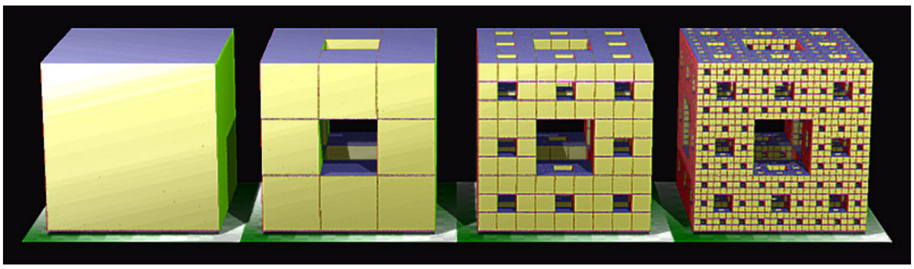
$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,; \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

où l'énergie potentielle $V(x, y)$ est :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2\,x^2 y - \frac{2}{3}\,y^3\right)$$

1. Ecrire l'énergie totale E du système. Montrer qu'elle est conservée dans le temps.
2. Mettre le système sous la forme de 4 EDO du premier ordre.
3. Calculer les points fixes du système.
4. Discuter de leur stabilité.

Exercice 2 : Eponge de Menger (6 points)



L'éponge de Menger est un exemple classique de fractal plongé dans un espace de dimension topologique 3. On le construit en partant d'un cube de coté 1, qu'on divise en 27 cubes de coté 1/3. On enlève ensuite les centres de chaque face, et le cube central. On recommence alors l'opération sur chacun des 20 cubes restants.

1. Calculer la dimension fractale de recouvrement de l'objet résultant d'une infinité d'itérations.
2. Dans le cadre du $\beta-$modèle d'intermittence de la turbulence, quelle est la valeur associée de β si la cascade se développe sur ce fractal ?
3. Dans une simulation numérique, combien d'étapes faut-il pour que le rapport des plus grandes échelles sur les plus petites soit supérieur à 10^3 ?
4. Quel est le nombre de Reynolds associé ?
5. Dans quelle fraction du volume est dissipée l'énergie turbulente ?

Exercice 3 : Kelvin-Helmholtz revisité

On reprend ici l'étude de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, mais d'une façon différente du cours :

— On considère un fluide unique, de densité ρ constante.

— On part d'un profil de vitesse plus réaliste.

La première partie permet d'établir l'équation de Rayleigh pour l'amplitude d'une perturbation dans un écoulement bidimensionnel. La deuxième partie établit les conditions de saut à une interface. La troisième partie applique ces résultats au cas d'un écoulement cisaillé. Ce problème est tiré de "Instabilités Hydrodynamiques", François Charru, 2007, CNRS Edition, sections 4.2 et 4.3.

Dans le cadre de l'examen, on demande d'admettre les résultats des parties A et B, et de traiter seulement la partie C.

Partie A (à admettre)

On suppose que l'écoulement est bidimensionnel (invariant par translation suivant la direction $\vec{e}_z$) que l'écoulement est incompressible et que la viscosité est négligeable. Les équations de Navier-Stokes se réduisent donc aux équations d'Euler. La vitesse $\vec{U}$ est donc solution de :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{U} = -\vec{\nabla} P \tag{1}$$

On part d'un écoulement de base (non perturbé) de la forme :

$$\vec{U}(x,y,t) = \bar{U}(y)\,\vec{e}_x\,; \quad P(x,y,t) = \bar{P} \tag{2}$$

c'est-à-dire un écoulement parallèle dans la direction x. $\bar{U}(y)$ ne dépend pas du temps, mais varie dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. On considérera ensuite un écoulement perturbé de la forme :

$$\vec{U} = \bar{U} + \vec{u}(x,y,t)\,; \quad P = \bar{P} + p(x,y,t)$$

où $\vec{u}$ a pour composantes (u,v) : $\vec{u} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y$. On considère que u, v et p sont de petites perturbations, ce qui permet de linéariser les équations.

1. Vérifier que les expressions (2) sont bien solution de (1).
2. Montrer que les équation linéarisées des perturbations s'écrivent, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\overrightarrow{u} + v\,\frac{\partial}{\partial y}\,\bar{U}\,\overrightarrow{e}_x = -\overrightarrow{\nabla} p \tag{3}$$

3. Comme $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, $\overrightarrow{u}$ dérive d'un potentiel vecteur, et comme le mouvement reste dans le plan (x, y) ce dernier peut s'écrire $\overrightarrow{A} = (0, 0, \psi)$. Vérifier que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Déduire alors de (3) que ψ est solution de :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\psi - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

On pourra pour cela éliminer la pression p par différenciation croisée.

4. On suppose une perturbation ayant la forme normale :

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{i(kx-\omega t)} + c.c.$$

où "*c.c.*" désigne la quantité conjuguée. On posera $c = \omega/k$. Déduire de (4) que l'équation à laquelle obéit l'amplitude $\hat{\psi}(y)$ est :

$$\left(\bar{U} - c\right)\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2 \hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}\,\hat{\psi}(y) = 0$$

Partie B (à admettre)

On considère un écoulement linéaire par morceaux, présentant une discontinuité en y_0 de la vitesse $\bar{U}(y)$ ou de sa dérivée $\partial\bar{U}/\partial y$. On note "+" les valeurs au dessus de la discontinuité, et "−" les valeurs en dessous, et $\Delta\left[X\right] = X_+ - X_-$ le saut de la quantité X à l'interface [1] y_0.

1. On suppose que l'interface située en y_0 se déplace sous l'effet d'une perturbation en $y_0 + \eta(x, t)$ où η fluctue suivant :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2}\,\hat{\eta}\,e^{i(kx-\omega t)} + c.c.$$

Evaluer la vitesse verticale de déplacement de l'interface.

2. Ecrire l'expression de la vitesse suivant y pour une fluctuation suivant :

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{i(kx-\omega t)} + c.c.$$

1. Ne pas confondre avec l'opérateur Laplacien.

3. En écrivant l'égalité de ces deux vitesses, déterminer une relation entre $\hat{\eta}$ et $\hat{\psi}$. Cette relation doit être vraie de part et d'autre de l'interface. En éliminant $\hat{\eta}$ entre les deux égalités, montrer qu'on obtient une première condition de saut à l'interface :

$$\Delta\left[\frac{\hat{\psi}}{\bar{U}-c}\right]=0$$

4. Une deuxième condition de saut est donnée par la continuité de la pression et de sa dérivée. Utiliser la composante suivant x de l'équation (3) pour établir que :

$$\Delta\left[\left(\bar{U}-c\right)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}-\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\,\hat{\psi}\right]=0$$

Partie C (12 points)

On admet ici les résultats des partie A et B. L'équation de $\hat{\psi}(y)$ est donc :

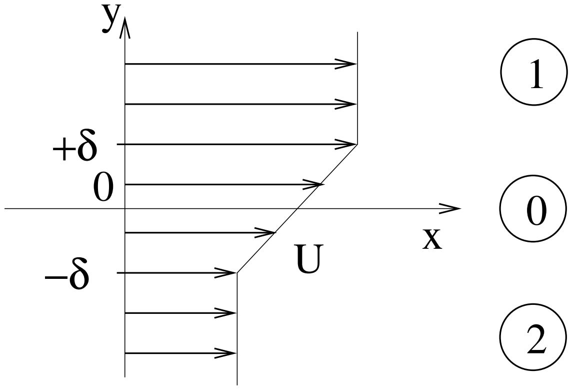
$$\left(\bar{U}-c\right)\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}-k^2\,\hat{\psi}(y)\right)-\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\,\hat{\psi}(y)=0 \tag{5}$$

et les conditions de saut à une interface sont :

$$\Delta\left[\frac{\hat{\psi}}{\bar{U}-c}\right]=0 \tag{6}$$

$$\Delta\left[\left(\bar{U}-c\right)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}-\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\,\hat{\psi}\right]=0 \tag{7}$$

On suppose que le profil de vitesse a la forme indiquée sur la figure ci-dessous



— $\bar{U}(y)=U_1, \quad y>\delta$
— $\bar{U}(y)=U_0+\Delta U\,\frac{y}{\delta}, \quad \delta>y>-\delta$
— $\bar{U}(y)=U_2, \quad -\delta>y$

1. Donner les valeurs de U_0 et ΔU pour que la vitesse $\bar{U}(y)$ soit continue en $\pm\delta$.
2. Compte tenu de ce profil, quelle est la forme générale d'une solution de (5) ? La perturbation doit décroître vers 0 pour $y\to\pm\infty$. Quelles conséquences cela a-t-il pour les constantes d'intégration dans les domaines 1 et 2 ?

3. Ecrire les conditions de saut (6) et (7) en $\pm\delta$ et en déduire les conditions sur les constantes d'intégration précédentes.
4. Ecrire la condition pour qu'il existe une solution non triviale à ce système de 4 équations. On admettra sans calcul qu'en développant cette condition on obtient l'équation de dispersion suivante :

$$4\,(k\delta)^2\,(c-U_0)^2 - \Delta U^2\,\left((2k\delta-1)^2 - e^{-4k\delta}\right) = 0$$

5. Quelle condition faut-il pour que c soit réel ? Pour quelles perturbations l'écoulement est-il instable ? Montrer que la valeur limite de ω lorsque $\delta \to 0$ est bien celle trouvée en cours pour une discontinuité de $\bar{U}(y)$.

Corrigé :

Exercice 1 : Système de Hénon-Heiles

1. L'énergie est :

$$E(x,y) = V(x,y) + \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

donc :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + 2\,x^2 y - \frac{2}{3}\,y^3\right) - \left(\dot{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + 2\,x^2 y - \frac{2}{3}\,y^3\right) = \dot{x}\,(x + 2xy) + \dot{y}\left(x^2 - y^2 + y\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = (x + 2xy)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left(y + x^2 - y^2\right)$$

On constate que $\frac{dE}{dt} = 0$, donc E est conservée.

2. Pour mettre le système au premier ordre, on pose :

$$X_1 = x\,; \quad X_2 = y\,; \quad X_3 = \dot{x}\,; \quad X_4 = \dot{y}$$

on a alors :

$$\dot{X}_1 = X_3$$

$$\dot{X}_2 = X_4$$

$$\dot{X}_3 = -X_1 - 2X_1X_2$$

$$\dot{X}_4 = -X_1^2 + X_2^2 - X_2$$

3. Dans tous les cas, on a $X_3 = X_4 = 0$. Les deux autres équations sont :

$$X_1\,(1 + 2\,X_2) = 0$$

$$X_1^2 - X_2\,(X_2 - 1) = 0$$

Il existe un point fixe "trivial" : $F_1 = (0,0,0,0)$. Les trois autres sont $F_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$, $F_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ et $F_4 = (0,1,0,0)$.

4. Même pour ce système Hamiltonien, la linéarisation donne des indications. La matrice Jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 - 2X_2 & -2X_1 & 0 & 0 \\ -2X_1 & -1 + 2X_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En F_1 l'équation caractéristique est :

$$0 = P_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$0 = -\lambda \left(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} \right) - \left(- \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \right)$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

Les deux valeurs possibles de λ sont des racines doubles. Toutes les valurs propres sont imaginaires pures. Ce point est donc stable.
En F_2 et F_3 l'équation caractéristique est :

$$0 = P_{2,3}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{3} & -\lambda & 0 \\ \pm\sqrt{3} & -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \pm\sqrt{3} & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \mp\sqrt{3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ \pm\sqrt{3} & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$0 = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} \pm \sqrt{3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \pm\sqrt{3} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 = 0$$

En F_4 l'équation caractéristique est :

$$0 = P_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$0 = -\lambda \left(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} \right) + 3 \left(\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \right)$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 = 0$$

C'est la même équation bicarrée ayant pour solutions

$$\lambda = \pm i\,\sqrt{3}\,; \quad \lambda = \pm 1$$

Les points F_2, F_3 et F_4 sont donc instables.

Exercice 2 : Eponge de Menger

1. On utilise des "pavés" cubiques. A chaque étape de l'itération le coté d'un pavé est divisé par 3, et le nombre de pavés nécessaire est multiplié par 20. Partant d'un coté de taille initiale 1, on a donc la suite :

n	l_n	N_n
0	1	1
1	$\frac{1}{3}$	20
2	$\frac{1}{3^2}$	20^2
3	$\frac{1}{3^3}$	20^3

   On voit que partant d'une longueur 1 à l'étape 0, à l'étape n il faut 20^n pavés de longueur $l_n = \frac{1}{3^n}$. Si on écrit :

$$N_n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D$$

   On a :

$$20^n = (3^n)^D$$

$$\log 20 = D\ \log(3)$$

   Donc :

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} \simeq 2.727$$

2. D'après le cours, on a directement :

$$\beta = \exp\left[(D-3)\ \log 2\right]$$

$$\beta = \exp\left[\left(\frac{\log 20}{\log 3} - 3\right)\ \log 2\right] \simeq 0.8275$$

3. On a :

$$3^6 = 729\,; \quad 3^7 = 2187$$

   Il faut donc 7 étapes successives pour atteindre le contraste demandé.

4. On a :

$$\eta = L\ (R_L)^{-3/4}$$

   Donc :

$$R_L = \left(\frac{L}{\eta}\right)^{4/3} = 3^{7\,\frac{4}{3}} \simeq 3\,10^4$$

5. La fraction de volume où se passe la dissipation est :

$$\beta^7 \simeq 0.2657$$

Commentaire (28 octobre 2015) dû à Antoine Marchal (M2).

Dans cette version du "β-modèle" on passe d'une échelle à la suivante par une division par 3 de l'échelle. L'expression de β est donc :

$$\beta = \exp\left[(D-3)\ \log 3\right]$$

$$\beta = \exp\left[\left(\frac{\log 20}{\log 3} - 3\right)\,\log 3\right] \simeq 0.74$$

La fraction de volume concernée par la dissipation est donc :

$$\beta^7 \simeq 0.122$$

Exercice 3 : Kelvin-Helmholtz revisité

Partie A

1. La condition de divergence nulle donne :

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

   or U_y et U_z sont identiquement nul, et U_x ne dépend que de y (et pas de x). donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$. $\bar{P}$ étant constant, son gradient est nul, et $\vec{U}$ ne dépend pas du temps. On doit donc avoir :

$$\left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{U} = \vec{0}$$

$$\left(U_x \frac{\partial}{\partial x}\right) U_x = 0$$

   toujours parce que U_x ne dépend pas de x.

2. La première équation est triviale. Pour la deuxième, on part de :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{U} = -\vec{\nabla} P$$

   En reportant les expressions proposées, on a :

$$\frac{\partial \bar{U}\,\vec{e}_x + \vec{u}}{\partial t} + \left(\left(\bar{U}\,\vec{e}_x + \vec{u}\right) \cdot \vec{\nabla}\right) \left(\bar{U}\,\vec{e}_x + \vec{u}\right) = -\vec{\nabla} p$$

   Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x} u + v\,\frac{\partial}{\partial y} \bar{U} = -\frac{\partial}{\partial x} p$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x} v = -\frac{\partial}{\partial y} p$$

3. Si $\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, alors :

$$u = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

En différenciant la première équation d'Euler par rapport à y et la deuxième par rapport à x on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \bar{U}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial^2 y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\bar{U}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}p$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \bar{U}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}p$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\psi - \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

4. La perturbation $\psi(x,y,t)$ est :

$$\psi = \frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

Donc :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\,k\,\frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{i(kx-\omega t)} - i\,k\,\frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\,\frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{i(kx-\omega t)} - k^2\,\frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\hat{\psi}(y)}{\partial y}\,e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\hat{\psi}(y)}{\partial y}\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\,e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right)\,e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi = i\,k\,\frac{1}{2}\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right)\,e^{i(kx-\omega t)} - i\,k\,\frac{1}{2}\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = -i\,\omega\,\frac{1}{2}\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right)\,e^{i(kx-\omega t)} + i\,\omega\,\frac{1}{2}\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

D'où l'équation finale :

$$-\left[\omega\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right) - \bar{U}\,k\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\,k\,\hat{\psi}(y)\right]\,e^{i(kx-\omega t)}$$

$$+\left[\omega\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right) - \bar{U}\,k\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\,k\,\hat{\psi}(y)\right]\,e^{-i(kx-\omega t)} = 0$$

Ce qui ne peut être identiquement nul que si :

$$\left(\bar{U} - c\right)\,\left(-k^2\,\hat{\psi}(y) + \frac{\partial^2\hat{\psi}(y)}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\,\hat{\psi}(y) = 0$$

Partie B

1. La vitesse verticale de l'interface est :

$$\frac{D}{Dt}\eta(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}(y)\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x,t)$$

$$= \left(-i\,\omega\,\frac{1}{2}\,\hat{\eta} + \bar{U}(y)\,i\,k\,\frac{1}{2}\,\hat{\eta}\right)\,e^{i(kx-\omega t)} - \left(-i\,\omega\,\frac{1}{2}\,\hat{\eta} + \bar{U}(y)\,i\,k\,\frac{1}{2}\,\hat{\eta}\right)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

2. La vitesse suivant y est :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

avec la forme de ψ et en l'évaluant à l'interface, on a :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\,k\,\frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{i(kx-\omega t)} + i\,k\,\frac{1}{2}\,\hat{\psi}(y)\,e^{-i(kx-\omega t)}$$

3. L'égalité des deux donne :

$$\left(\bar{U}_{\pm} - c\right)\,\hat{\eta} = -\hat{\psi}_{\pm}$$

Soit :

$$-\hat{\eta} = \frac{\hat{\psi}_{+}}{\bar{U}_{+} - c} = \frac{\hat{\psi}_{-}}{\bar{U}_{-} - c}$$

$$\Delta\left[\frac{\hat{\psi}}{\bar{U} - c}\right] = 0$$

4. L'équation d'Euler suivant x donne :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)u + v\,\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$$

$$= \left(\left(\bar{U} - c\right)\,\frac{\partial \hat{\psi}(y)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\,\hat{\psi}(y)\right)\,\frac{i}{2k}\,\left[e^{i(kx-\omega t)} - e^{-i(kx-\omega t)}\right]$$

Donc, à l'interface on doit avoir :

$$\Delta\left[\left(\bar{U} - c\right)\,\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\,\hat{\psi}\right] = 0$$

Partie C

1. On a :

$$\bar{U}(\delta) = U_1 = U_m + \Delta U$$
$$\bar{U}(-\delta) = U_2 = U_m - \Delta U$$

donc :

$$U_m = \frac{U_1 + U_2}{2}$$
$$\Delta U = \frac{U_1 - U_2}{2}$$

2. Avec le profil de vitesse imposé, on a :

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}(y)}{\partial y^2} - k^2\, \hat{\psi}(y) = 0$$

$\hat{\psi}(y)$ s'écrit donc sous la forme :

$$\hat{\psi}(y) = A\, e^{ky} + B\, e^{-ky}$$

Pour que ψ s'annule lorsque $y \to \pm\infty$ on doit donc avoir :

$$\hat{\psi}_1(y) = B_1\, e^{-ky}$$

$$\hat{\psi}_0(y) = A_0\, e^{ky} + B_0\, e^{-ky}$$

$$\hat{\psi}_2(y) = A_2\, e^{ky}$$

3. Comme $\bar{U}$ est continue, $\bar{U}_+ = \bar{U}_-$ aux interfaces. La première conditions de saut est donc simplement :

$$\hat{\psi}_+ = \hat{\psi}_-$$

La deuxième donne :

$$\left(\bar{U}_+ - c\right) \frac{\partial \hat{\psi}_+}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}_+}{\partial y}\, \hat{\psi}_+ = \left(\bar{U}_- - c\right) \frac{\partial \hat{\psi}_-}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}_-}{\partial y}\, \hat{\psi}_-$$

Les valeurs des différentes fonctions sont :

$$\hat{\psi}_1(\delta) = B_1\, e^{-k\delta}$$

$$\hat{\psi}_0(\delta) = A_0\, e^{k\delta} + B_0\, e^{-k\delta}$$

$$\hat{\psi}_0(-\delta) = A_0\, e^{-k\delta} + B_0\, e^{k\delta}$$

$$\hat{\psi}_2(-\delta) = A_2\, e^{-k\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\hat{\psi}_1(\delta) = -B_1\, k\, e^{-k\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\hat{\psi}_0(\delta) = A_0\, k\, e^{k\delta} - B_0\, k\, e^{-k\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\hat{\psi}_0(-\delta) = A_0\, k\, e^{-k\delta} - B_0\, k\, e^{k\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\hat{\psi}_2(-\delta) = A_2\, k\, e^{-k\delta}$$

$$\bar{U}(\delta) = U_1$$

$$\bar{U}(-\delta) = U_2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{U}(\delta)_+ = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{U}(\delta)_- = \frac{\Delta U}{\delta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{U}(-\delta)_+ = \frac{\Delta U}{\delta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{U}(-\delta)_- = 0$$

En $+\delta$ on obtient :

$$B_1\, e^{-k\delta} = A_0\, e^{k\delta} + B_0\, e^{-k\delta}$$

$$-\left(\bar{U}_1 - c\right)\, B_1\, k\, e^{-k\delta} = \left(\bar{U}_1 - c\right)\, \left(A_0\, k\, e^{k\delta} - B_0\, k\, e^{-k\delta}\right) - \frac{\Delta U}{\delta}\, \left(A_0\, e^{k\delta} + B_0\, e^{-k\delta}\right)$$

En $-\delta$ on obtient :

$$A_0\, e^{-k\delta} + B_0\, e^{k\delta} = A_2\, e^{-k\delta}$$

$$\left(\bar{U}_2 - c\right)\, \left(A_0\, k\, e^{-k\delta} - B_0\, k\, e^{k\delta}\right) - \frac{\Delta U}{\delta}\, \left(A_0\, e^{-k\delta} + B_0\, e^{k\delta}\right) = \left(\bar{U}_2 - c\right)\, A_2\, k\, e^{-k\delta}$$

On regroupe les terme d'un seul coté :

$$A_0\, e^{k\delta} + B_0\, e^{-k\delta} - B_1\, e^{-k\delta} = 0$$

$$\left(\left(\bar{U}_1 - c\right)\, k\, e^{k\delta} - \frac{\Delta U}{\delta}\, e^{k\delta}\right)\, A_0 - \left(\left(\bar{U}_1 - c\right)\, k\, e^{-k\delta} + \frac{\Delta U}{\delta}\, e^{-k\delta}\right)\, B_0$$
$$+ \left(\bar{U}_1 - c\right)\, k\, e^{-k\delta}\, B_1 = 0$$

$$A_0\, e^{-k\delta} + B_0\, e^{k\delta} - A_2\, e^{-k\delta} = 0$$

$$\left(\left(\bar{U}_2 - c\right)\, k\, e^{-k\delta} - \frac{\Delta U}{\delta}\, e^{-k\delta}\right)\, A_0 - \left(\left(\bar{U}_2 - c\right)\, k\, e^{k\delta} + \frac{\Delta U}{\delta}\, e^{k\delta}\right)\, B_0$$
$$- \left(\bar{U}_2 - c\right)\, k\, e^{-k\delta}\, A_2 = 0$$

4. Ce système linéaire ne peut avoir de solution non triviale que si son déterminant est nul. Soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2k\delta} & -1 & 0 \\ \left(\left(\bar{U}_1 - c\right)\, k - \frac{\Delta U}{\delta}\right) & -\left(\left(\bar{U}_1 - c\right)\, k + \frac{\Delta U}{\delta}\right)\, e^{-2k\delta} & \left(\bar{U}_1 - c\right)\, k & 0 \\ e^{-2k\delta} & 1 & 0 & -1 \\ \left(\left(\bar{U}_2 - c\right)\, k - \frac{\Delta U}{\delta}\right)\, e^{-2k\delta} & -\left(\left(\bar{U}_2 - c\right)\, k + \frac{\Delta U}{\delta}\right) & 0 & -\left(\bar{U}_2 - c\right)\, k \end{vmatrix} = 0$$

On admettra que cela donne :

$$4\, (k\delta)^2\, (c - U_0)^2 - \Delta U^2\, \left((2k\delta - 1)^2 - e^{-4k\delta}\right) = 0$$

5. c est solution de :

$$(c - U_0)^2 = \left(\frac{\Delta U}{2\,k\delta}\right)^2 \left((2k\delta - 1)^2 - e^{-4k\delta}\right)$$

On n'a une solution réelle (et donc une solution stable dans le temps – ω réel) que si

$$(1 - 2k\delta)^2 > e^{-4k\delta}$$

Soit, les grandes valeurs de k. L'écoulement est donc instable pour les grandes longueurs d'ondes.
Pour les petites valeurs de δ on a (avec $U_0 = 0$) :

$$\omega = \pm i\,\Delta U\,k$$

ce qui correspond bien à l'équation 2.2, page 20 du poly, lorsque $\rho_1 = \rho_2$.