Examen du 10 Janvier 2013

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés. Le barème est indicatif et sera revu (et ramené sur 20) en fonction du contenu des copies.

"In examinations the foolish ask questions that the wise cannot answer".
Oscar Wilde

Exercice 1 : Système de Lotka-Volterra (4 points)

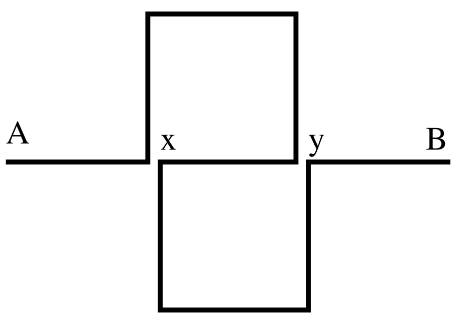
C'est l'exemple type de système proie-prédateur. Il est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(\alpha - \beta\, y) \\ \dot{y} &= -y\,(\gamma - \delta\, x) \end{aligned}$$

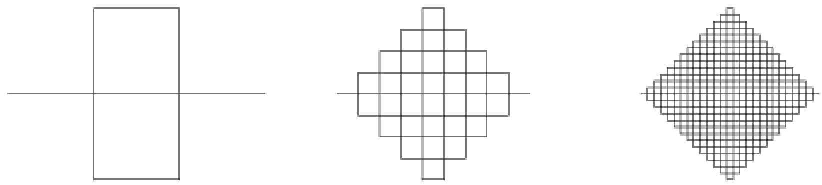
Les 4 constantes (α, β, γ, δ) sont positives.

1. Déterminer les points fixes du système.
2. Déterminer leur stabilité.
3. Montrer que $K(x, y)$ est une constante du mouvement (une intégrale première), avec :
$$K = y^{\alpha}\,\exp(-\beta\, y)\; x^{\gamma}\,\exp(-\delta\, x)$$
4. Donner l'allure des trajectoires de phase de (x, y) dans l'espace de phase.

Exercice 2 : Courbe de Péano (3 points)



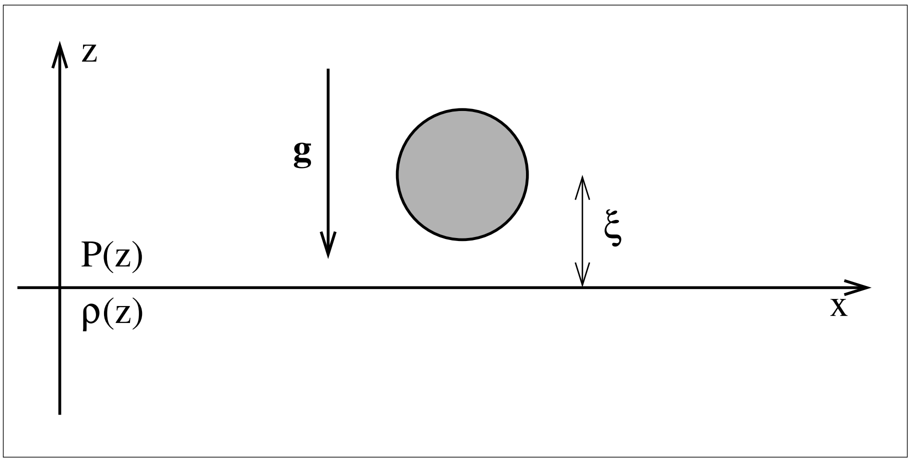
La courbe de Péano se construit de façon récursive à partir de l'élément de base ci-dessus. Les points en x et y sont en réalité confondus. Ils n'ont été artificiellement écartés ici que pour clarifier la structure. Après respectivement 2 et 3 itérations, on obtient la figure ci-dessous.



1. Calculer la dimension fractale de recouvrement de l'objet résultant d'une infinité d'itérations.
2. Quels commentaires vous inspire cette courbe ?

Exercice 3 : Instabilité Convective (ondes de gravité) (13 points)

Cet exercice est inspiré de “An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics”, M.J. Thompsons, 2006, Section 4.1. On considère un milieu fluide stratifié au repos soumis à un champ de pesanteur g constant. La pression P et la masse volumique ρ sont fonctions de la hauteur z.



1. Si on note $P(z)$ et $\rho(z)$ la pression et la masse volumique en z, exprimer $P\left(z+\xi\right)$ et $\rho\left(z+\xi\right)$ par un développement limité au premier ordre pour ξ petit.
2. Une bulle de fluide est déplacée d'une quantité infinitésimale ξ de sa position de référence à z jusqu'à l'altitude $z+\xi$. On suppose que l'équilibre de pression est instantané. La pression dans la bulle est donc égale à la pression extérieure $P(z+\xi)$. En revanche, les temps thermiques sont longs. La transformation est donc adiabatique, de coefficient γ. Ecrire l'expression reliant la masse volumique dans la bulle, $\rho\left(z\right)+\delta\rho$, à $\rho(z)$, $P(z+\xi)$ et $P(z)$.
3. Le déplacement ξ étant infinitésimal, linéariser cette expression (par un développement au premier ordre).
4. En comparant $\rho(z+\xi)$ à l'extérieur et $\rho(z)+\delta\rho$ à l'intérieur de la bulle, en déduire la condition pour que la bulle soit ramenée vers sa position de départ.

5. Dans ce cas, écrire l'équation différentielle à laquelle obéit ξ, décrivant le mouvement de la bulle.
6. Montrer que la fréquence d'oscillation de la bulle autour de sa position d'équilibre est donnée par :
$$\omega^2 = \frac{\rho\, g^2}{P}\left(\frac{d\log\rho}{d\log P} - \frac{1}{\gamma}\right)$$
7. Montrer que, dans le cas d'un gaz parfait, la condition d'instabilité obtenue en (4) peut se réécrire :
$$\frac{d\log T}{d\log P} > 1 - \frac{1}{\gamma}$$

La pulsation ω est connue sous le nom de fréquence de Brunt-Väisälä, et correspond à l'excitation d'ondes internes de gravité dans un milieu stratifié stable. Le critère obtenu en (7) est le critère de Schwarzschild pour l'instabilité convective, où $1 - \frac{1}{\gamma}$ est le gradient adiabatique.

Corrigé :

Exercice 1 : Système de Lotka-Volterra

1. Points fixes :

$$\begin{aligned} x\,(\alpha - \beta\, y) &= 0 \\ -y\,(\gamma - \delta\, x) &= 0 \end{aligned}$$

Il y a donc 2 points fixes, $(0,0)$ et $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

2. Le Jacobien du système s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta\, y & -\beta\, x \\ \delta\, y & \delta\, x - \gamma \end{pmatrix}$$

- Point $(0,0)$:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont de signes opposés. Les points fixe est donc instable (point selle).

- Point $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\,\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\,\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est : $\lambda^2 + \alpha\,\gamma = 0$. Les deux valeurs propres sont donc $\lambda_\pm = \pm i\,\sqrt{\alpha\,\gamma}$. On est donc dans un cas de stabilité marginale.

3. On calcule la dérivée temporelle de $K(x,y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} = \alpha \quad & y^{\alpha-1} \exp(-\beta\, y)\; x^{\gamma} \exp(-\delta\, x)\; \frac{\partial y}{\partial t} \\ - \quad & \beta\, y^{\alpha} \exp(-\beta\, y)\; x^{\gamma} \exp(-\delta\, x)\; \frac{\partial y}{\partial t} \\ + \quad & \gamma\, y^{\alpha} \exp(-\beta\, y)\; x^{\gamma-1} \exp(-\delta\, x)\; \frac{\partial x}{\partial t} \\ - \quad & \delta\, y^{\alpha} \exp(-\beta\, y)\; x^{\gamma} \exp(-\delta\, x)\; \frac{\partial x}{\partial t} \end{aligned}$$

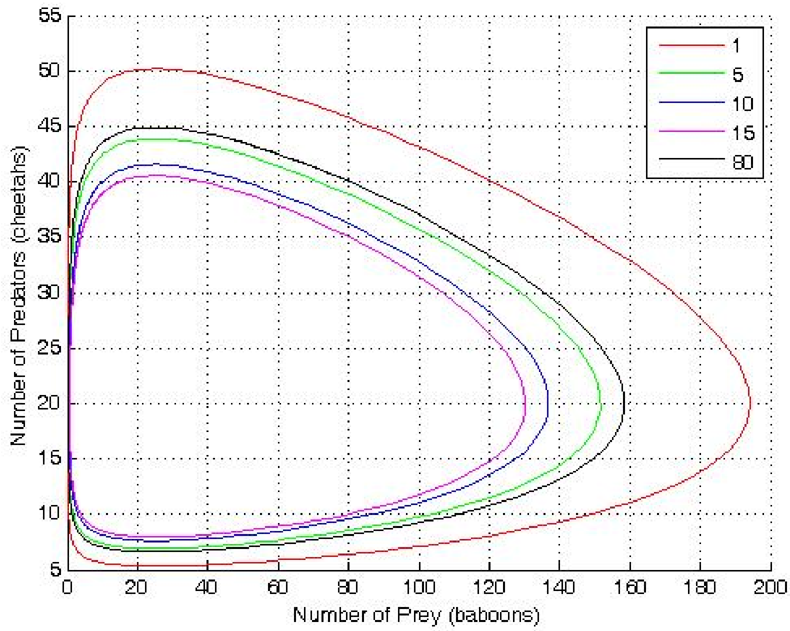
$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= -\alpha\, K\; (\gamma - \delta\, x) \\ &+\; \beta\, K\, y\; (\gamma - \delta\, x) \\ &+\; \gamma\, K\; (\alpha - \beta\, y) \\ &-\; \delta\, K\, x\; (\alpha - \beta\, y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = (-\alpha\,\gamma + \alpha\,\delta\,x - \delta\,x\,\alpha + \delta\,x\,\beta\,y + \gamma\,\alpha - \gamma\,\beta\,y + \beta\,y\,\gamma - \beta\,y\,\delta\,x)\; K$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 0$$

Ce qui montre que K est constant au cours du temps.

4. Cette figure est tirée de :
   `en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equation`



Exercice 2 : Courbe de Péano

1. On utilise des "pavés" linéaires. A chaque étape de l'itération la longueur est divisé par 3, et le nombre de pavés nécessaire est multiplié par 9. Partant d'un coté de taille initiale 1, on a donc la suite :

n	l_n	N_n
0	1	1
1	$\frac{1}{3}$	3^2
2	$\frac{1}{3^2}$	3^4
3	$\frac{1}{3^3}$	3^6

On voit que partant d'une longueur 1 à l'étape 0, à l'étape n il faut 3^{2n} pavés de longueur $l_n = \frac{1}{3^n}$. Si on écrit :

$$N_n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D$$

On a :

$$3^{2n} = (3^n)^D$$

Donc :

$$D = 2$$

2. On constate donc que cette courbe (à l'infini) est dense dans le plan. Chaque sommet de l'approximation à l'étape n pouvant être repéré, et son abscisse curviligne depuis une extrémité de la courbe calculée, on a donc là un moyen de construire une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Instabilité Convective

1. Un développement au premier ordre donne :

$$P\left(z+\xi\right) = P\left(z\right) + \xi\,\frac{dP}{dz}$$

$$\rho\left(z+\xi\right) = \rho\left(z\right) + \xi\,\frac{d\rho}{dz}$$

2. Pour une transformation adiabatique, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}$$

Soit ici :

$$\frac{P\left(z+\xi\right)}{P\left(z\right)} = \left(\frac{\rho\left(z\right)+\delta\rho}{\rho\left(z\right)}\right)^{\gamma}$$

ou :

$$1+\xi\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz} = \left(1+\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^{\gamma}$$

3. On prend le logarithme de cette expression, puis on développe au premier ordre :

$$\xi\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz} = \gamma\,\frac{\delta\rho}{\rho}$$

Soit :

$$\delta\rho = \xi\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{\rho}{P}\,\frac{dP}{dz}$$

4. La bulle revient vers sa position d'équilibre si elle est plus lourde que son environnement, soit :

$$\delta\rho > \xi\,\frac{d\rho}{dz}$$

$$\frac{1}{\gamma} > \frac{d\log\rho}{d\log P}$$

où l'on a pu diviser par ξ parce qu'il est positif avec z orienté vers le haut.

5. La position de la bulle est donnée par le principe fondamental de la dynamique, en faisant le bilan de la poussée d'Archimède. On note V le volume de la bulle :

$$\left(\rho+\delta\rho\right)\,V\,\frac{d^2\xi}{dz^2} = \left(\rho+\xi\,\frac{d\rho}{dz}\right)\,V\,g - \left(\rho+\delta\rho\right)\,V\,g$$

$$\left(\rho+\xi\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{\rho}{P}\,\frac{dP}{dz}\right)\,\frac{d^2\xi}{dz^2} = \xi\,\frac{d\rho}{dz}\,g - \xi\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{\rho}{P}\,\frac{dP}{dz}\,g$$

6. En considérant que l'accélération est une perturbation (et est donc petite), on peut négliger les fluctuations de ρ dans le membre de gauche, ce qui donne :

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + g\left(\frac{1}{\gamma}\,\frac{d\log P}{dz} - \frac{d\log\rho}{dz}\right)\xi = 0$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega^2 = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \log P}{dz} - \frac{d \log \rho}{dz} \right)$$

$$\omega^2 = g \, \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{d \log \rho}{d \log P} \right)$$

Enfin, en utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique : $P(z) = P_0 - \rho \, g \, z$, on obtient (en n'oubliant pas que la pression diminue lorsque z augmente) :

$$\omega^2 = \frac{\rho \, g^2}{P} \left(\frac{d \log \rho}{d \log P} - \frac{1}{\gamma} \right)$$

Tout ceci n'est valable qu'en restant au voisinage de la cote z de départ.

7. Pour un gaz parfait, on a :

$$\log P = \log \rho + \log T$$

L'équation d'instabilité s'écrit donc :

$$\frac{1}{\gamma} > \frac{d \log P - d \log T}{d \log P}$$

$$\frac{d \log T}{d \log P} > 1 - \frac{1}{\gamma}$$