Examen du 6 Janvier 2014

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés. Le barème est indicatif et sera revu (et ramené sur 20) en fonction du contenu des copies.

"In examinations the foolish ask questions that the wise cannot answer".
Oscar Wilde

1 Exercice 1 : Système de Rössler (3 points)

Le système de Rössler est défini par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + a\,y$$

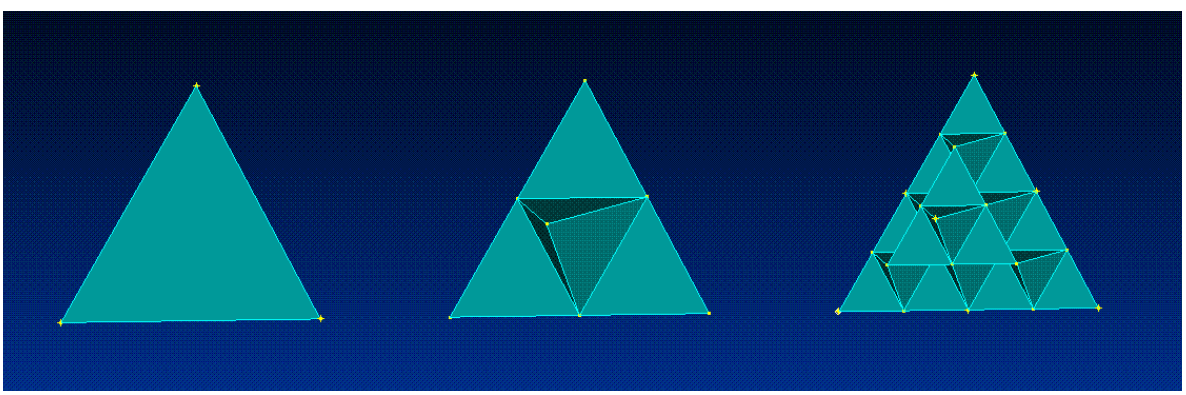
$$\frac{dz}{dt} = c + z\,(x - 2b)$$

1. Déterminer les points fixes du système.
2. Calculer le Jacobien du système et l'équation caractéristique pour un point quelconque.

— Hors examen : Ce système est souvent étudié pour $a = 0.1$, $b = 7$, $c = 0.1$. Une étude numérique est intéressante.

2 Exercice 2 : Le Hérisson (2 points)

On construit un "hérisson" de la façon itérative suivante :



— On part d'un tétraèdre régulier (4 faces en triangle équilatéral) de coté unité.
— Chaque triangle peut-être divisé en 4 triangles de coté 1/2. On construit sur le triangle central un nouveau tétraèdre régulier.
— L'opération est répétée à l'infini sur chacunes des faces triangulaires, y compris celles des nouveaux tétraèdres.

Calculer la dimension fractale de l'enveloppe fermée ainsi formée.

3 Problème : Equation de Orr-Sommerfeld et Théorème de Rayleigh (15 points)

Ce problème est directement inspiré du cours sur les instabilités du Pr. Anne Juel à l'Université de Manchester : `http://www.maths.manchester.ac.uk/~ajuel/MATH45132/`

On considère un écoulement entre deux plans infinis séparés par une distance L. Le fluide est incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν. On choisi un repère (x, y, z) où la direction y est perpendiculaire aux plans. Les équations du mouvements (continuité et Navier-Stokes) sont :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*)\, \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho}\, \nabla^* p^* + \nu\, \Delta^* \mathbf{u}^*$$

où l'étoile (*) caractérise des quantités dimensionnées.

1. En considérant une échelle de vitesse U, proposer un dédimensionnement de cette équation. Quelle est l'échelle de pression P associée ?
2. On considère l'équation de Navier-Stokes incompressible à deux dimensions sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\, \frac{\partial u}{\partial x} + v\, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\, \frac{\partial v}{\partial x} + v\, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ sont les composantes de la vitesse dans les directions (x, y).
Vérifier que l'écoulement de base $\mathbf{u} = (U_B(y), 0)$ est une solution exacte de l'équation, à condition que :

$$p = p_B = \frac{1}{Re}\, \frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\, x + p_0$$

3. On considère une petite perturbation de cet écoulement :

$$(u, v, p) = (U_B, 0, p_B) + \epsilon\, [\tilde{u}\,(x, y, t)\,, \tilde{v}\,(x, y, t)\,, \tilde{p}\,(x, y, t)]$$

où $\epsilon \ll 1$. Etablir les équations linéarisées du système.

4. On cherche une solution sous la forme de modes normaux correspondant à une onde progressive dans la direction x :

$$\tilde{u}(x, y, t) = \hat{u}(y)\, \exp\left(i\, \alpha\, (x - ct)\right)$$
$$\tilde{v}(x, y, t) = \hat{v}(y)\, \exp\left(i\, \alpha\, (x - ct)\right)$$
$$\tilde{p}(x, y, t) = \hat{p}(y)\, \exp\left(i\, \alpha\, (x - ct)\right)$$

Simplifier les équation linéarisées dans ce cas. Note : α et c peuvent être complexes.

5. Eliminer les variables $\hat{u}$ et $\hat{p}$ pour obtenir une équation unique en $\hat{v}$:

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} - 2\, \alpha^2\, \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \alpha^4\, \hat{v} \right) - i\, \alpha \left((U_B - c) \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2\, \hat{v} \right) - \frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\, \hat{v} \right) = 0$$

Cette équation est la version 2D de l'équation de Orr-Sommerfeld, qui permet d'étudier les instabilités d'un écoulement plan parallèle.

6. Ecrire cette équation dans le cas d'un fluide sans viscosité. On appelle cette équation l'équation de Rayleigh. On l'admet ici dans tout l'espace ($y \to \pm\infty$).
   En supposant que :
$$\lim_{y \to \infty} |\hat{v}| = 0$$
   multiplier cette équation par $\bar{v}$, la quantité conjuguée de $\hat{v}$, et intégrer sur y de $-\infty$ à $+\infty$. Montrer (Théorème de Rayleigh) qu'une condition nécessaire à l'existence d'une instabilité est la présence d'un point d'inflexion du champ de vitesse de base U_B. On posera :
$$c = c_r + i\,c_i$$

Corrigé

Exercice 1 : Système de Rössler

Le système de Rössler est défini par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + a\,y$$

$$\frac{dz}{dt} = c + z\;(x - 2b)$$

1. Les points fixes du système sont tels que :

$$z = -y$$

$$x = -a\,y$$

$$a\,y^2 + 2b\,y + c = 0$$

   Le système a donc deux points fixes si $\Delta = b^2 - a\,c > 0$, qui sont :

$$y_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

2. Le Jacobien du système s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - 2b \end{pmatrix}$$

   L'équation caractéristique est :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ z & 0 & x - 2b - \lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a-\lambda \\ z & 0 \end{vmatrix} + (x - 2b - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix}$$

$$D(\lambda) = z\;(a - \lambda) + (x - 2b - \lambda)\;(1 - \lambda\;(a - \lambda))$$

$$D(\lambda) = a\,z + x - 2b - (1 + z + a\,x - 2ab)\;\lambda + (x + a - 2b)\;\lambda^2 - \lambda^3$$

Exercice 2 : Le Hérisson

Pour calculer la dimension fractale, on va "paver" l'objet avec des triangles de coté $l_n = \frac{1}{2^n}$ à l'étape n, et on compte le nombre N_n de triangles nécessaires. On obtient le tableau suivant :

n	l_n	N_n
0	$\frac{1}{2^0}$	4×6^0
1	$\frac{1}{2^1}$	4×6^1
2	$\frac{1}{2^2}$	4×6^2

Plus généralement, pour $l_n = \frac{1}{2^n}$, le nombre de face est $N_n = 4 \times 6^n$. La relation entre l_n et N_n est donc :

$$\frac{N_n}{N_0} = \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{-\frac{\log 6}{\log 2}}$$

La dimension fractale de l'enveloppe est donc de $D = \frac{\log 6}{\log 2} \simeq 2.585$.

Problème : Equation de Orr-Sommerfeld

1. On a :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \left(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*\right) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \nu \, \Delta^* \mathbf{u}^*$$

L'échelle de vitesse est U et l'échelle de longueur L, on a donc une échelle de temps $T = \frac{L}{U}$. En notant sans * les quantités dédimensionnées, on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{P}{L} \nabla p + \nu \frac{U}{L^2} \Delta \mathbf{u}$$

En divisant l'équation de Navier-Stokes par $\frac{U^2}{L}$, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{P}{L} \frac{L}{U^2} \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}$$

avec :

$$Re = \frac{L\,U}{\nu}$$

On obtient donc une équation bien dédimensionnée en choisissant une échelle de pression P telle que :

$$P = \rho \, U^2$$

L'équation finale est donc :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}$$

2. On reporte l'écoulement de base $(U_B(y), 0)$ dans les équations. L'équation de continuité est vérifiée de façon triviale.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

L'équation en v donne :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

ce qui montre que p est une fonction de x seulement : $p = p(x)$. L'équation en u donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}$$

soit :

$$p_B(x) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2} \, x + p_0$$

3. On remplace $(U_B + \epsilon \, \tilde{u}, \epsilon \, \tilde{v}, p_B + \epsilon \, \tilde{p})$ dans le système :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U_B \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U_B}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U_B \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right)$$

4. On remplace de nouveau par $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}) \exp\left(i\,\alpha\,(x - ct)\right)$:

$$i\,\alpha\,\hat{u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0$$

$$i\,\alpha\,(U_B - c)\,\hat{u} + \frac{\partial U_B}{\partial y}\,\hat{v} = -i\,\alpha\,\hat{p} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - \alpha^2\,\hat{u}\right)$$

$$i\,\alpha\,(U_B - c)\,\hat{v} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2\,\hat{v}\right)$$

5. On commence par utiliser l'équation de continuité pour obtenir :

$$\alpha^2\,\hat{p} = -\frac{1}{Re}\left(-\frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial y^3} + \alpha^2\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right) - i\,\alpha\,(U_B - c)\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + i\,\alpha\frac{\partial U_B}{\partial y}\,\hat{v}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2\,\hat{v}\right) - i\,\alpha\,(U_B - c)\,\hat{v}$$

Puis, on dérive la première équation pour reprendre $\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}$ de la deuxième.

$$\alpha^2\,\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = -\frac{1}{Re}\left(-\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} + \alpha^2\,\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2}\right) - i\,\alpha\,\frac{\partial U_B}{\partial y}\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - i\,\alpha\,(U_B - c)\,\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + i\,\alpha\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\,\hat{v} + i\,\alpha\frac{\partial U_B}{\partial y}\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}$$

$$\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} - 2\,\alpha^2\,\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \alpha^4\,\hat{v}\right) - i\,\alpha\left((U_B - c)\left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2\,\hat{v}\right) - \frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\,\hat{v}\right) = 0$$

6. Si la viscosité est nulle, alors le nombre de Reynolds tend vers l'infini. L'équation se réduit donc simplement à :

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \left(\alpha^2 + \frac{1}{U_B - c}\,\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\right)\hat{v} = 0$$

On en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v}\,\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha^2 + \frac{1}{U_B - c}\,\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\right)\bar{v}\,\hat{v}\,dy = 0$$

On intègre la première équation par partie, et on introduit $(U_B - \bar{c})$ dans le dernier terme :

$$\left[\bar{v}\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha^2 + \frac{(U_B - \bar{c})}{|U_B - c|^2}\,\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\right)\bar{v}\,\hat{v}\,dy = 0$$

Le terme intégré est nul à cause des conditions aux limites. Il reste donc :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right|^2 dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha^2 + \frac{(U_B - \bar{c})}{|U_B - c|^2}\,\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\right)|\hat{v}|^2\,dy = 0$$

La partie imaginaire de cette équation est :

$$c_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|U_B - c|^2}\,\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}\,|\hat{v}|^2\,dy = 0$$

Il ne peut y avoir instabilité que si c_i est différent de 0 (sinon, la partie temporelle de la perturbation reste oscillante). Comme $|\hat{v}|^2$ et $|U_B - c|^2$ sont tous les deux positifs, l'intégrale ne peut s'annuler que si $\frac{\partial^2 U_B}{\partial y^2}$ change de signe en fonction de y. Il est donc nécessaire (mais non suffisant) que le profil de vitesse de base possède au moins un point d'inflexion. Ceci constitue le théorème de Rayleigh.