

# COURS ÉCRIT

1	Approximation de Boussinesq . . . . .	2
2	Problème de Rayleigh-Bénard . . . . .	4
3	Équations sous formes adimensionnées . . . . .	6
4	Problème de Rayleigh-Bénard bidimensionnel . . . . .	8
5	Conditions aux limites périodiques . . . . .	9
6	Conditions aux limites réalistes . . . . .	13
7	Conditions aux limites en températures fixées . . . . .	15

## Introduction

L'objectif est d'énoncer ici les équations du modèle permettant de rendre compte des mouvements de convection rencontrés dans un fluide soumis à un gradient de température puis de calculer les seuils de déclenchement de cette instabilité.

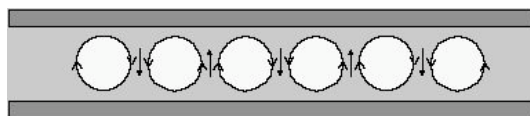


Figure 1: *Rouleaux de convection.*

L'approximation de Boussinesq permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des forces de flottabilité (poussée d'Archimède) dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température.

Le système d'équations de l'approximation de Boussinesq étant énoncé, on s'intéresse à la configuration idéalisée d'une couche fluide horizontale forcée

par un gradient thermique vertical, soit en imposant les températures aux frontières, soit en imposant un flux thermique. On explore alors les différents choix d'adimensionnalisation permettant la formulation mathématique du problème de Rayleigh-Bénard.

On envisage alors le cas où les températures de plaques sont fixées ainsi que le cas où le flux de chaleur est fixé. De même, on compare le cas des conditions aux limites cinématiques libres et rigides. L'état conductif est caractérisé par une vitesse nulle et un profil linéaire de température à gradient vertical. On suppose que le bas de la couche est plus chaud que le haut et l'on augmente progressivement le forçage. Lorsque le forçage thermique est faible l'état conductif est stable. Une perturbation de température ou de vitesse est dissipée par la diffusion thermique ou la viscosité avant que la force d'Archimède n'aie eu le temps d'agir. Lorsque le forçage thermique dépasse un seuil critique, l'état conductif devient instable et des mouvements de convection apparaissent.

Cette étude de stabilité s'effectue en linéarisant les équations autour de l'état conductif. On montre alors que la stabilité de l'état conductif ne dépend que de la valeur d'un nombre sans dimensions appelé nombre de Rayleigh. On calcule ici le nombre de Rayleigh critique pour plusieurs configurations de conditions aux limites.

## 1 Approximation de Boussinesq

Pour décrire le mouvement de convection d'un fluide chauffé par le bas lorsque le champ de vitesse reste faible devant la vitesse du son, les équations de Navier-Stokes compressibles sont trop complexes et les équations de Navier-Stokes incompressibles ne rendent pas compte des forces de flotabilité. L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces forces tout en filtrant les ondes sonores.

### 1.1 Fluides compressibles ou incompressibles

On rappelle tout d'abord les équations de Navier-Stokes incompressibles en utilisant les notations de l'ouvrage "Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables" (O. Thual, Cépaduès 1997) :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} \\ \rho \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho g \underline{e}_z + (s_n + \mu_n) \underline{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \underline{U} + \mu_n \Delta \underline{U} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} &= k \Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} + s_n (\operatorname{div} \underline{U})^2 + 2 \mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} \\ e &= \mathcal{E}(\rho, T) \quad \text{et} \quad p = \mathcal{P}(\rho, e) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $s_n$  et  $\mu_n$  sont les deux coefficients de viscosité de Lamé (avec  $s_n = -2 \mu_n/3$  selon l'hypothèse de Stokes) et  $k$  le coefficient de conductivité thermique. Les notations suivantes sont utilisées pour les grandeurs physiques :  $\rho$  pour le champ de densité volumique,  $\underline{U}$  pour le champ de vitesse,  $p$  pour le champ de pression,  $e$  pour le champ d'énergie interne volumique,  $T$  pour le champ de température et  $\underline{\underline{D}}$  pour le champ de tenseur des taux de déformations obtenu en prenant la partie symétrique du gradient du champ de vitesse. La notation  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$  désigne la dérivée particulaire.

Les deux lois d'état  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  dépendent du fluide considéré. Ici, la densité volumique des forces extérieures  $\underline{f} = -\rho g \underline{e}_z$  est celle induite par le champ de gravité. On a supposé qu'il n'y avait pas de taux de production volumique de chaleur ( $r = 0$ ). Pour fermer ce système d'équations, il faut spécifier des conditions aux limites, et, dans le cas où l'on s'intéresse aux solutions instationnaires, des conditions initiales.

L'approximation de fluide incompressible consiste à imposer  $\rho = \rho_r$  partout et à neutraliser la loi d'état  $p = \mathcal{P}(\rho, e)$  qui n'a alors plus de sens. Ceci revient à se placer dans la limite où la vitesse du son est infiniment grande devant la vitesse de l'écoulement. La pression, qui était une grandeur thermodynamique dans le cas compressible, devient une grandeur purement dynamique permettant de satisfaire la contrainte  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$  (on dit que  $p$  est le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte). On dit aussi que l'approximation de fluide incompressible permet de "filtrer" les ondes sonores. Ce filtrage permet d'augmenter considérablement le pas de temps des simulations numériques qui devrait, sinon, être plus petit que la période des vibrations sonores.

## 1.2 Équations de l'approximation de Boussinesq

Pour certains écoulements, l'approximation de fluide incompressible est trop drastique, car elle ne permet pas de prendre en compte les variations de densité dues aux variations de température. En présence de gravité, des inhomogénéités de densité induisent un champ de force d'Archimède qui peut mettre le fluide en mouvement. Ces mouvements ne sont pourtant pas de même nature que les ondes sonores que l'on souhaite continuer à "filtrer".

L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces variations de densité tout en supposant que la vitesse des ondes sonores est infinie devant la vitesse de l'écoulement. Elle consiste à écrire les équations d'évolution du

fluide sous la forme

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\
 \rho_r \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho g \underline{e}_z + \mu_n \Delta \underline{U} \\
 \rho_r \frac{de}{dt} &= k \Delta T + 2 \mu_n \underline{D} : \underline{D} \\
 e &= \mathcal{E}(\rho_r, T) \quad \text{et} \quad \rho = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r)].
 \end{aligned} \tag{2}$$

On voit que l'on a supposé  $\rho$  égal à une densité constante  $\rho_r$  partout, sauf dans le terme  $\rho g \underline{e}_z$  qui est responsable de la force d'Archimède. Cette hypothèse d'incompressibilité a donc entraîné  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ , supprimant de ce fait plusieurs termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de bilan de l'énergie interne.

D'autre part, cette hypothèse d'incompressibilité interdit de prendre en compte une loi d'état de la forme  $p = \mathcal{P}(\rho, e)$  et la pression  $p$  devient un paramètre dynamique découplé de la thermodynamique. Cette loi d'état est alors remplacée par une loi  $\rho = \mathcal{R}(T)$  que l'on suppose linéaire en écrivant  $\rho = \mathcal{R}(T) = \rho_r [1 - \alpha(T - T_r)]$ . Le coefficient  $\alpha$  est appelé "coefficient de dilatation thermique". Il est positif dans la mesure où un échauffement autour de la température  $T_r$  induit une diminution de la densité.

La loi d'état  $e = \mathcal{E}(\rho_r, T)$  permet d'écrire  $\frac{de}{dt} = C_v(\rho_r, T) \frac{dT}{dt}$  avec  $C_v = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_\rho$ .

En reportant les lois d'état dans le système d'équation, celui-ci se met sous la forme

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\
 \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\underline{\operatorname{grad}} \left( \frac{p}{\rho_r} + g z \right) + \alpha g (T - T_r) \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} \\
 \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T + 2 \frac{\nu}{C_v} \underline{D} : \underline{D}
 \end{aligned} \tag{3}$$

où  $\nu = \mu_n / \rho_r$  est la viscosité cinématique,  $\kappa = k / (\rho_r C_v)$  est le coefficient de diffusivité thermique à volume constant.

Dans la plupart des applications, on néglige le terme  $2 (\nu / C_v) \underline{D} : \underline{D}$ , qui correspond à l'échauffement du fluide par les forces visqueuses, devant le terme  $\kappa \Delta T$ , qui correspond à la diffusion de la température dans le fluide.

## 2 Problème de Rayleigh-Bénard

L'approximation de Boussinesq ayant été explicitée, il est maintenant possible de construire le modèle rendant compte de l'écoulement de convection observé

lorsque l'on chauffe un fluide par le bas. Ce forçage est traduit dans le modèle par la formulation de conditions aux limites.

### 2.1 Conditions aux limites

On considère un fluide compris entre deux plaques planes horizontales délimitant les frontières d'équations  $z = 0$  et  $z = d$ . L'épaisseur de la couche fluide est donc la distance  $d$ .

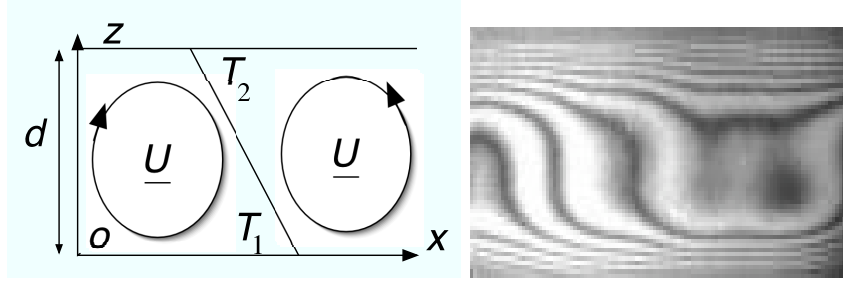


Figure 2: Couche fluide chauffée par le bas. a) Schéma des rouleaux de convection. b) Visualisation expérimentale du champ de température.

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq, il est nécessaire de spécifier des conditions aux limites pour la température et pour la vitesse. Pour ces deux catégories de conditions aux limites, plusieurs variantes sont possibles suivant la nature du problème physique considéré. Nous énumérons ici les principales configurations.

On considère deux types de conditions aux limites en température :

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées : } & T = T_1 \text{ en } z = 0, \quad T = T_2 \text{ en } z = d. \\ \text{Flux fixé : } & \kappa \frac{\partial T}{\partial z} = q \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (4)$$

Les conditions aux limites en températures fixées correspondent au cas où les parois planes sont infiniment conductrices et relient le fluide à des thermostats de températures fixées. Les conditions aux limites en flux fixé correspondent à un chauffage délivrant une quantité de chaleur déterminée. Lorsque  $q < 0$  ou  $T_1 < T_2$  le fluide est dit stratifié. Le problème de Rayleigh-Bénard, que l'on considère ici, s'intéresse aux cas où  $q > 0$  ou  $T_1 > T_2$  pour lesquels des mouvements de convection peuvent se développer.

On considère deux types de conditions aux limites en vitesses :

$$\begin{aligned} \text{Libres : } & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \\ \text{Rigides : } & u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (5)$$

Les conditions aux limites libres correspondent au cas idéalisé où la couche fluide considérée est comprise entre deux autres fluides et où la déformation des interfaces est négligée. Les conditions aux limites rigides correspondent au cas où les frontières sont des parois rigides.

## 2.2 État conductif

On appelle état conductif la solution stationnaire telle que  $\underline{U} = \underline{0}$  et  $T = T_c(z) = T_1 - \Gamma z$ . Cette solution satisfait les conditions aux limites en températures fixées en choisissant  $\Gamma = (T_1 - T_2)/d$  ou bien les conditions aux limites à flux fixé en choisissant  $\Gamma = q/\kappa$ .

On définit  $\theta$ , l'écart de température au profil conductif, à l'aide du changement de notation  $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$ . Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Gamma w + \kappa \Delta \theta \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $\Pi = p/\rho_r - gz + \alpha g T_r z - \alpha g T_1 z + \frac{1}{2} \alpha g \Gamma z^2$ .

Dans ces équations, on a négligé le terme  $2(\nu/C_v) \underline{D} : \underline{D}$ , la vitesse verticale est notée  $w$  et l'on a utilisé  $T_c(z) \underline{e}_z = \operatorname{grad} (T_1 z - \frac{1}{2} \Gamma z^2)$ . Le terme  $\Gamma w$  représente l'advection de température par la vitesse due au gradient vertical de température  $\Gamma$ .

## 2.3 Modèle sous forme dimensionnelle

En explicitant les dérivées particulières, les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= \Gamma w + \kappa \Delta \theta . \end{aligned} \quad (7)$$

Les deux sortes de conditions aux limites pour la température considérées ici sont

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} & \quad \theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \\ \text{Flux fixé :} & \quad \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (8)$$

Les deux sortes de conditions aux limites en vitesses sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Libres :} & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \\ \text{Rigides :} & u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{array} \quad (9)$$

### 3 Équations sous formes adimensionnées

Le choix d'un système d'unité permet d'écrire les équations du modèle sous forme adimensionnée. Cette procédure est essentielle pour déterminer le nombre de paramètres sans dimension qui contrôlent le problème. Toutes les adimensionnalisations sont équivalentes tant que l'on ne néglige pas de termes. On présente ici deux adimensionnalisations qui diffèrent par le choix de l'unité de temps.

#### 3.1 Choix des unités

Nous allons considérer plusieurs systèmes d'adimensionnalisation en explorant plusieurs choix d'unités. L'unité de longueur sera toujours basée sur l'épaisseur  $d$  de la couche fluide, ce que l'on note  $[L] = d$ . On note  $[\tau] = \zeta d^2/\kappa$  le choix des unités de temps, le facteur  $\zeta$  étant un nombre sans dimension que l'on pourra choisir ultérieurement. De même, on note  $[\Theta] = \xi d \Gamma$  le choix des unités de température, le nombre sans dimension  $\xi$  restant à choisir. On a supposé ici  $\Gamma > 0$ . On peut donc résumer cette famille d'adimensionnalisations en écrivant

$$[L] = d \quad [\tau] = \zeta d^2/\kappa \quad \text{et} \quad [\Theta] = \xi d \Gamma. \quad (10)$$

Si l'on choisit, par exemple,  $\zeta = 1$ , l'unité de temps  $[\tau] = d^2/\kappa$  est le temps caractéristique de diffusion de la température. Si l'on choisit maintenant  $\zeta = \kappa/\nu$ , l'unité de temps  $[\tau] = d^2/\nu$  est le temps visqueux. Si l'on choisit  $\xi = 1$ , l'unité de température  $[\Theta] = \Gamma d = T_1 - T_2$  est la différence de température entre le bas et le haut de la couche pour l'état conductif considéré.

Quelque soit le choix de  $\zeta$  et  $\xi$ , l'unité de vitesse est le rapport entre l'unité de longueur et de temps ce que l'on écrit

$$[U] = [L]/[\tau] = \frac{1}{\zeta} \frac{\kappa}{d}. \quad (11)$$

### 3.2 Équations adimensionnées

En utilisant les mêmes notations pour les champs que dans le cas où ces grandeurs sont dimensionnées, les équations adimensionnées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} \right) &= -\underline{\operatorname{grad}} \Pi + \xi R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} \\ \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \theta \right) &= \frac{1}{\xi} w + \Delta \theta \end{aligned} \quad (12)$$

où apparaissent les deux nombres adimensionnés que sont  $P$ , le nombre de Prandtl, et  $R$ , le nombre de Rayleigh, dont les expressions sont les suivantes

$$P = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{et} \quad R = \frac{\alpha g d^4 \Gamma}{\nu \kappa} = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa}. \quad (13)$$

L'écriture des conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = 1$  (en coordonnées adimensionnées) est identique à la formulation dimensionnée.

### 3.3 Adimensionnalisation visqueuse

On choisit ici  $\zeta = 1/P$  et  $\xi = 1$  ce qui conduit au système d'unités  $[L] = d$ ,  $[\tau] = d^2/\nu$ ,  $[U] = \nu/d$  et  $[\Theta] = \Gamma d = T_1 - T_2$ . Les équations adimensionnées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \frac{\Pi}{P} + R \theta \underline{e}_z + \Delta \underline{U} \\ P \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \theta \right) &= w + \Delta \theta \end{aligned} \quad (14)$$

### 3.4 Adimensionnalisation thermique

On choisit ici  $\zeta = \xi = 1$  ce qui conduit au système d'unités  $[L] = d$ ,  $[\tau] = d^2/\kappa$ ,  $[U] = \kappa/d$  et  $[\Theta] = \Gamma d = T_1 - T_2$ . Les équations adimensionnées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \theta &= w + \Delta \theta. \end{aligned} \quad (15)$$



## 4 Problème de Rayleigh-Bénard bidimensionnel

Par simplicité, on se restreint ici aux écoulements bidimensionnels dans un plan vertical. Un raison physique permettant de justifier cette approche est le fait que l'on observe des rouleaux de convections 2D au seuil de l'instabilité, du moins pour les conditions aux limites présentées ici.

### 4.1 Fonction de courant

On se place ici dans le cas 2D défini par le fait que  $\underline{U}(x, z)$  et  $\theta(x, z)$  ne dépendent pas de la coordonnée  $y$ . Dans le cadre de l'adimensionnalisation thermique, les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + P \Delta u \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + P \Delta v \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R P \theta + P \Delta w \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= w + \Delta \theta .
 \end{aligned} \tag{16}$$

On voit que l'équation d'évolution de  $v$  est découplée des équations d'évolution de  $u$ ,  $w$  et  $\theta$ . La composante  $v$  se comporte donc comme un scalaire passif. En l'absence d'un gradient de pression dans la direction  $y$ , cette vitesse tend donc vers zéro.

L'équation  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  entraîne alors qu'il existe une fonction de courant  $\psi(x, z)$  telle que  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$  et  $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Les conditions aux limites en vitesses s'expriment alors de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 \text{Libres :} & \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\
 \text{Rigides :} & \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1.
 \end{aligned} \tag{17}$$

### 4.2 Élimination de la pression

Pour éliminer la pression généralisée  $\Pi$ , il suffit de prendre le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement. En remarquant que  $\text{rot } \underline{U} = -\Delta \phi \underline{e}^{(2)} = -(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}) \underline{e}^{(2)}$  et en projetant sur la direction  $\underline{e}^{(2)}$  orthogonale au plan 2D, on obtient les équations du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J(\psi, \Delta \psi) = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\psi, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta \quad (18)$$

où la notation  $J$  est définie par  $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}$ .

## 5 Conditions aux limites périodiques

Le calcul de stabilité est simple s'il on suppose que l'écoulement est périodique dans toutes les directions. En effet, ces symétries de translations permettent de considérer des modes propres ayant la forme d'exponentielles en espace et en temps, solution du modèle linéarisé autour de la solution stationnaire conductive. Ce cas est présenté ici pour permettre une approche moins aride de la notation d'instabilité. Les calculs seront utiles pour des conditions aux limites plus réalistes.

### 5.1 Linéarisation

On linéarise les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq autour de l'état conductif décrit par  $\underline{U} = \underline{0}$  et  $T = T_c(z) = T_1 + \Gamma z$ . Avec la notation  $T = T_c(z) + \theta$ , cet état est caractérisé par  $\theta = 0$ .

En choisissant les unités de longueur  $[L] = d$ , de temps  $[\tau] = d^2/\kappa$  et de température  $[\Theta] = d \Gamma = T_1 - T_2$  de l'adimensionnalisation thermique, les équations linéarisées s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Gamma w + \Delta \theta. \end{aligned} \quad (19)$$

L'expression des conditions aux limites abordées au chapitre précédent (températures fixées ou flux fixé, libres ou rigides) reste identique après linéarisation. Les deux sortes de conditions aux limites pour la température sont donc

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} & \quad \theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Flux fixé :} & \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Les deux sortes de conditions aux limites en vitesses sont donc

$$\begin{aligned} \text{Libres :} & \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Rigides :} & \quad u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned} \quad (21)$$

## 5.2 Modes de Fourier

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas académique des conditions aux limites périodiques dans la direction  $z$  et nous notons  $2d$  la période pour la variable  $z$  dimensionnelle ce qui conduit à la périodicité 2 pour la variable  $z$  adimensionnée. Même si ces conditions aux limites ne correspondent pas, a priori, à une situation physique, elles présentent l'avantage d'introduire simplement des notions qui seront utiles pour l'examen de conditions aux limites physiques.

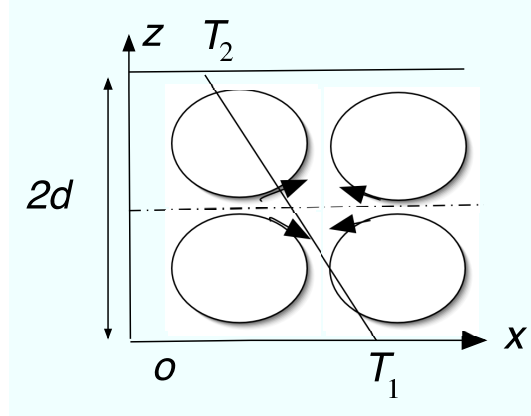


Figure 3: Conditions aux limites périodiques dans la direction  $z$ .

La linéarité des équations, la périodicité dans la direction verticale et l'invariance par translation dans les directions horizontales conduisent à la recherche de solutions sous la forme

$$[\underline{U}(\underline{x}, t), \theta(\underline{x}, t)] = [\underline{U}_m, \theta_m] e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad (22)$$

où  $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$  avec  $k_1$  et  $k_2$  quelconques et  $k_3 = n \pi$  avec  $n$  entier pour assurer la périodicité en  $z$ . Les amplitudes  $\underline{U}_m$  et  $\theta_m$  sont des quantités complexes. Comme le problème est linéaire, les solutions réelles sont obtenues en prenant la partie réelle des solutions complexes.

Pour étudier la stabilité temporelle de l'état conducteur, on suppose que  $\underline{k}$  est réel et  $s$  est complexe. Si l'on trouve des solutions non nulles telles que la partie réelle de  $s$  est positive, on pourra affirmer que l'état conducteur est instable dans la mesure où une petite perturbation est exponentiellement amplifiée, tout du moins dans le cadre de l'analyse linéaire. Dans le cas contraire, l'état conducteur est stable.

Pour un vecteur d'onde donné  $\underline{k}$ , on peut choisir le système de coordonnées de telle sorte que  $k_2 = 0$ . On voit alors que l'on se ramène au cas bidimensionnel

où  $\underline{U}(x, z)$  et  $\theta(x, z)$  ne dépendent pas de la coordonnée  $y$  et où la composante  $v(x, z)$  ne joue aucun rôle. On peut donc introduire une fonction de courant  $\psi(x, z)$  et l'on considère alors des modes de Fourier de la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = [\psi_m, \theta_m] e^{i(k_1 x + k_3 z) + s t} \quad (23)$$

où  $\psi_m$  et  $\theta_m$  sont des amplitudes complexes.

### 5.3 Équation aux valeurs propres

En reportant l'expression des modes de Fourier dans le système d'équations 2D on en obtient la transformée de Fourier qui s'écrit

$$\begin{aligned} -s k^2 \psi_m &= i k_1 R P \theta_m + P k^4 \psi_m \\ s \theta_m &= i k_1 \psi_m - k^2 \theta_m \end{aligned} \quad (24)$$

où  $k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$  désigne le module du vecteur d'onde  $\underline{k}$ . On peut écrire ce système linéaire sous la forme

$$s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P k^2 & -R P i k_1 / k^2 \\ i k_1 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Ce système admet des solutions  $(\psi_m, \theta_m)$  non triviales lorsque le déterminant du système est nul c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -P k^2 - s & -R P i k_1 / k^2 \\ i k_1 & -k^2 - s \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$s^2 + s(P + 1)k^2 + P k^4 - R P k_1^2 / k^2 = 0. \quad (27)$$

### 5.4 Détermination du signe des valeurs propres

Le discriminant de ce polynôme de degré deux en  $s$  est  $(P-1)^2 k^4 + 4 R P k_1^2 / k^2$ . Son signe étant toujours positif, les racines sont réelles. Pour déterminer leurs signes, on écrit alors l'équation sous la forme

$$s^2 + s(P + 1)k^2 + P \frac{k_1^2}{k^2} \left( \frac{k^6}{k_1^2} - R \right) = 0. \quad (28)$$

Pour  $R < k^6 / k_1^2$  leur produit est positif et les deux racines sont négatives dans la mesure où leur somme l'est. Les deux modes de vecteur d'onde  $\underline{k}$  correspondant aux deux racines  $s_1$  et  $s_2$  sont alors amortis exponentiellement.

Pour  $R > k^6 / k_1^2$  un de ces modes croît exponentiellement dans la mesure où le produit des racines du polynôme en  $s$  est négatif.

### 5.5 Détermination du Rayleigh critique

On rappelle ici que la périodicité en  $z$  requiert qu'un vecteur d'onde  $\underline{k} = (k_1, k_3)$  soit tel que  $k_3 = n \pi$  avec  $n$  entier. Étant donné un tel vecteur d'onde, la valeur critique du nombre de Rayleigh à partir de laquelle un des modes correspondant croît exponentiellement est donc

$$R_c(k_1, n) = \frac{(k_1^2 + n^2 \pi^2)^3}{k_1^2}. \quad (29)$$

Lorsque  $n$  varie, ce nombre est minimum pour  $n = 1$  et l'on peut alors tracer la courbe  $R_c(k_1) = R_c(k_1, 1)$ .

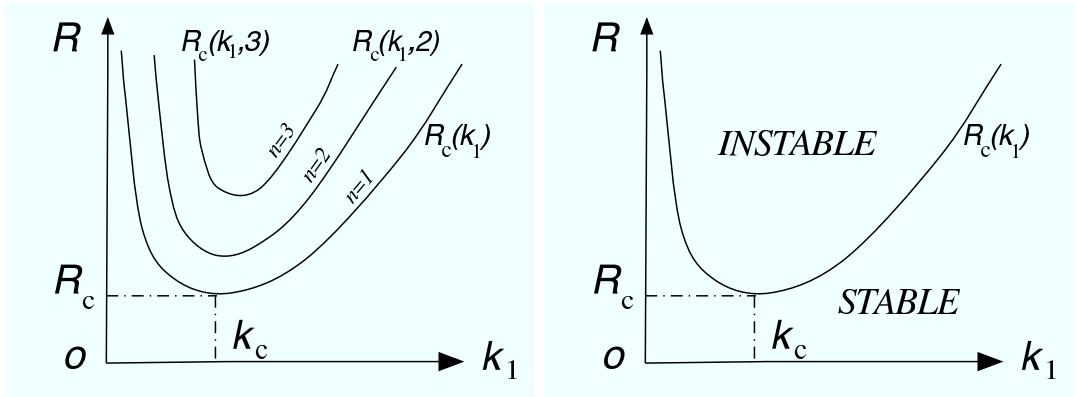


Figure 4: a) Courbes marginales  $R_c(k_1, n)$  pour  $n = 1, 2, 3$ . b) Domaine stabilité dans le plan  $(k_1, R)$ .

Le minimum de cette fonction est atteint pour  $k_c = \pi/\sqrt{2}$  et vaut  $R_c = R_c(k_c) = 27 \pi^4/4$ . On peut alors affirmer que pour  $R < R_c$ , tous les modes de vecteurs d'ondes  $\underline{k} = (k_1, n \pi)$  décroissent exponentiellement. L'état conductif est alors stable. Pour  $R > R_c$ , une famille de modes incluant le vecteur d'onde  $(k_c, \pi)$  croissent exponentiellement. L'état conductif est alors instable.

Lorsque que l'on considère des conditions aux limites périodiques dans la direction horizontale, la composante  $k_1$  du vecteur d'onde est de la forme  $k_1 = m k_0$  où  $k_0$  est le nombre d'onde fondamental et  $m$  est entier. Ce nombre d'onde peut s'écrire  $k_0 = 2 \pi \beta$  si  $\beta = d/L$  est le rapport de la longueur  $d$  sur la période horizontale  $L$  en coordonnées dimensionnées ( $1/\beta$  est la période horizontale en coordonnées adimensionnées). Le nombre de Rayleigh critique associé à ces conditions aux limites est alors  $R_c(k_0)$ .

On remarque que le seuil de l'instabilité de Rayleigh-Bénard est indépendant du nombre de Prandtl  $P$ .

## 6 Conditions aux limites réalistes

On s'intéresse maintenant au calcul de stabilité du problème de Rayleigh-Bénard dans le cas de conditions aux limites réalistes. Le cas des conditions aux limites libres se déduit des calculs effectués pour les conditions aux limites périodiques dans la direction verticale. Le cas des conditions aux limites rigides nécessite un peu plus d'efforts.

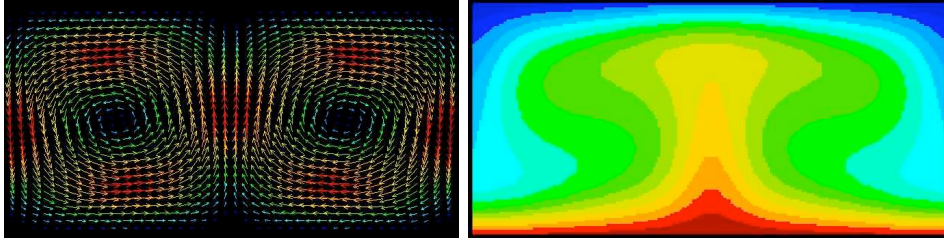


Figure 5: Visualisation numérique de rouleaux de convection. a) Champ de vitesse. b) Champ de température.

### 6.1 Problème aux valeurs propres

Pour étudier le cas des conditions aux limites physiques (températures fixées ou flux fixé, libres ou rigides) on cherche des solutions sous la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = [\Psi(z), \Theta(z)]e^{ik_1 x + st}. \quad (30)$$

La dépendance avec les variables horizontales est sinusoidale dans la mesure où les équations sont invariantes par les translations dans ces directions. On peut alors choisir les coordonnées de telle sorte que la composante  $k_2$  du vecteur d'onde horizontal soit nulle, ce qui ramène le problème au cas bidimensionnel et donc à une fonction de courant  $\psi$ .

En reportant dans les équations on obtient le système

$$\begin{aligned} s(D^2 - k_1^2)\Psi &= -ik_1 RP\Theta + P(D^2 - k_1^2)\Psi \\ s\Theta &= -ik_1\Psi + (D^2 - k_1^2)\Theta \end{aligned} \quad (31)$$

où  $D = \frac{d}{dz}$  est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $z$ .

Les deux sortes de conditions aux limites en températures s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées :} & \quad \Theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Flux fixé :} & \quad D\Theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Les deux sortes de conditions aux limites en vitesses sont :

$$\begin{aligned} \text{Libres :} & \quad \Psi = 0 \text{ et } D^2\Psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \\ \text{Rigides :} & \quad \Psi = 0 \text{ et } D\Psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned} \quad (33)$$

## 6.2 Élimination de $\Theta$

Pour éliminer la fonction  $\Theta(z)$  on écrit le système sous la forme

$$\begin{aligned} [s - P(D^2 - k_1^2)] (D^2 - k_1^2) \Psi &= -i k_1 R P \Theta \\ [s - (D^2 - k_1^2)] \Theta &= -i k_1 \Psi \end{aligned} \quad (34)$$

On applique l'opérateur  $s - (D^2 - k_1^2)$  à la première équation ce qui conduit à

$$[s - (D^2 - k_1^2)] [s - P(D^2 - k_1^2)] (D^2 - k_1^2) \Psi = -k_1^2 R P \Psi. \quad (35)$$

Comme  $\Psi = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$  à la fois pour les conditions aux limites libres et rigides, les deux sortes de conditions aux limites en températures s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{Températures fixées : } & s D^2 \Psi - P(D^2 - k_1^2)^2 \Psi = 0 \text{ en } z = 0, 1. \\ \text{Flux fixé : } & s D^3 \Psi - P(D^2 - k_1^2)^2 D \Psi = 0 \text{ en } z = 0, 1. \end{aligned} \quad (36)$$

## 7 Conditions aux limites en températures fixées

On se place ici dans le cas des conditions aux limites en températures fixées et on examine successivement le cas des conditions aux limites libres et rigides.

### 7.1 Conditions aux limites libres

Pour le cas des conditions aux limites libres, on doit résoudre l'équation

$$[s - (D^2 - k_1^2)] [s - P(D^2 - k_1^2)] (D^2 - k_1^2) \Psi = -k_1^2 R P \Psi. \quad (37)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi = 0, \quad D^2 \Psi = 0 \text{ et } D^4 \Psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (38)$$

La symétrie  $z \rightarrow -z$  de ce système entraîne que les solutions sont toutes de la forme  $\Psi = \psi_m \sin(n \pi z)$  où  $n$  est un nombre entier.

On voit alors que la discussion sur la stabilité de l'état conducteur est la même que celle qui a été menée pour le cas des conditions aux limites périodiques,

ce qui conduit au nombre de Rayleigh critique et au nombre d'onde horizontal critique suivant :

$$R_c = \frac{27 \pi^4}{4} \sim 657,5 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2. \quad (39)$$

## 7.2 Conditions aux limites rigides

Pour le cas des conditions aux limites rigides, on doit résoudre l'équation

$$\left[ s - (D^2 - k_1^2) \right] \left[ s - P(D^2 - k_1^2) \right] (D^2 - k_1^2) \Psi = -k_1^2 R P \Psi. \quad (40)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi = 0, \quad D\Psi = 0 \quad \text{et} \quad s D^2 \Psi - P(D^2 - k_1^2)^2 \Psi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1. \quad (41)$$

Les solutions  $\Psi(z)$  sont la superposition de fonction  $\exp(\pm \lambda z)$  où  $\lambda^2$  est l'une des trois solutions complexes de l'équation

$$\left[ s - (\lambda^2 - k_1^2) \right] \left[ s - P(\lambda^2 - k_1^2) \right] (\lambda^2 - k_1^2) + R P k_1^2 = 0. \quad (42)$$

La recherche du Rayleigh critique s'effectue en posant  $s = 0$  dans les équations. En écrivant que le système avec ses conditions aux limites admet des solutions non triviales, on se ramène à une équation permettant de déterminer deux courbes  $R_p(k_1)$  et  $R_i(k_1)$  pour les modes pairs et impairs. En calculant le minimum de ces fonctions, on obtient le nombre de Rayleigh critique des conditions aux limites rigides ainsi le nombre d'onde horizontal correspondant :

$$R_c \sim 1707.762 \quad \text{et} \quad k_c = 3.117. \quad (43)$$

Le détail de ces calculs est explicité dans le livre "Hydrodynamics and Hydromagnetic stability" de S. Chandrasekhar (Oxford University Press 1961, Dover 1981).

## Conclusion

Nous avons donc énoncé le modèle permettant de décrire le mouvement convectif d'une couche fluide chauffée par le bas dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Différents jeux de conditions aux limites ont été détaillé. La solution stationnaire observée lorsque le forçage est faible correspond à un transfert de chaleur par conduction. Lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique, il apparaît des rouleaux de convection. Le calcul du nombre de Rayleigh critique a été effectué en linéarisant les équations du modèles autour de la solution conductive, puis en résolvant le problème aux valeurs propres associé.