

Systemes dynamiques étendus

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

12 Novembre 2013

Classes de modèles

Classes de modèles

❖ Classes de modèles

- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ LBM
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique

- Deux variables libres :
 - ◆ Le temps
 - ◆ L'espace
- Deux types de variables
 - ◆ Discrètes
 - ◆ Continues
- Nombreux couplages
 - ◆ Diffusif : Entre plus proches voisins.
 - ◆ Global : Tout le monde avec tout le monde.
 - ◆ Autres...

⇒ Multiples types de modèles...

Classes de modèles

Classes de modèles

❖ Classes de modèles

- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ LBM
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique

Modèle	Automate	CML	CML	PDE
Temps	Discret	Discret	Continu	Continu
Espace	Discret	Discret	Discret	Continu
Variable	Discrète	Continue	Continue	Continue

- Variable discrète : Mapping
- Variable continue : ODE
- La synchronisation temporelle peut se faire à des instants discrets, même si l'évolution est continue.
- etc...

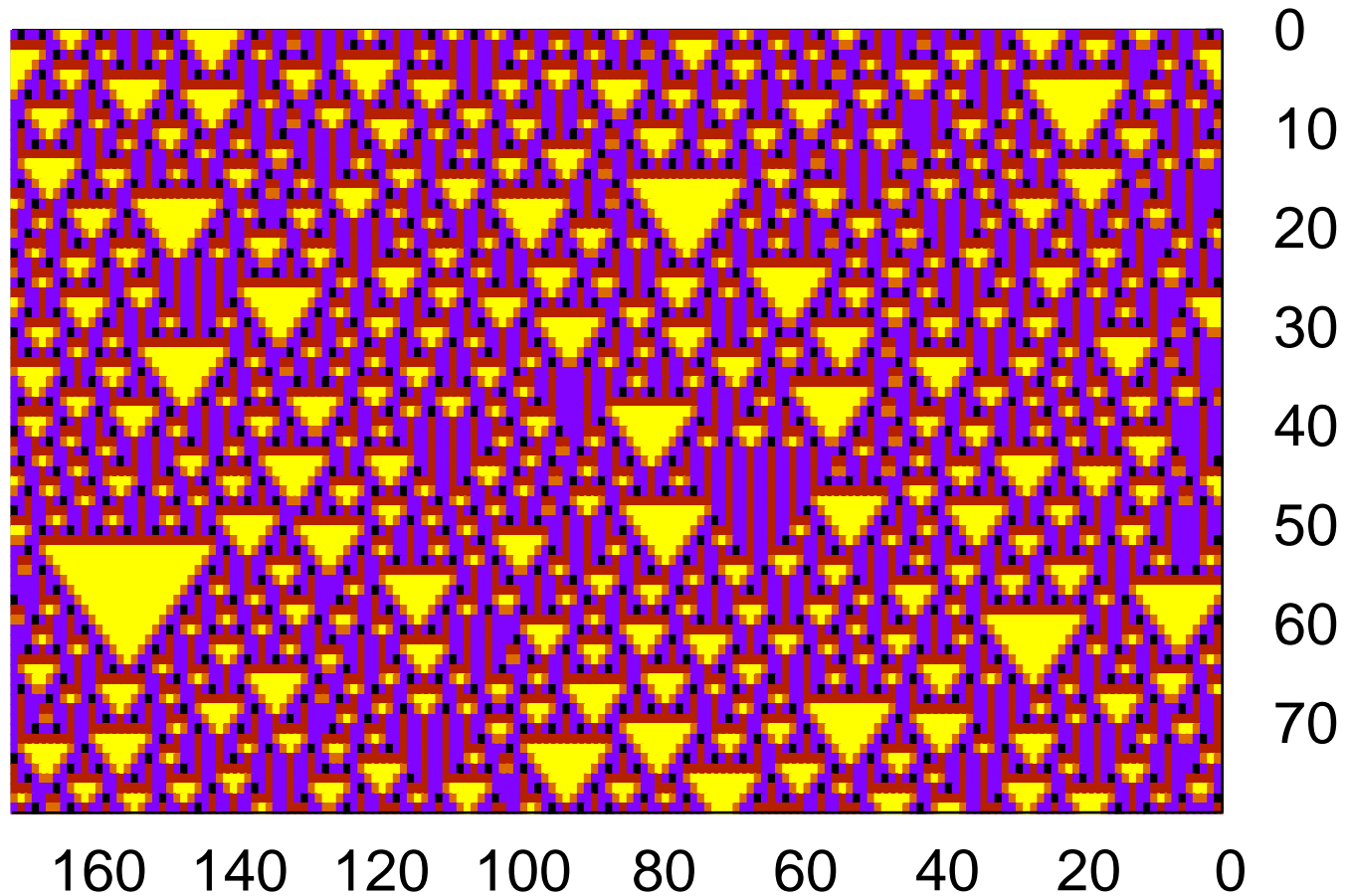
Exemple - Automates 1D

Classes de modèles

- ❖ Classes de modèles
- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ LBM
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique



(voir animations)

Exemple - Automates 1D

Classes de modèles

❖ Classes de modèles

❖ Automates 1D

❖ Gaz sur réseau

❖ LBM

❖ CML MIS

❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique

- Il en existe 256 à valeurs 0 ou 1 (2^8)
- Explorés par Wolfram systématiquement.
- Généralisables de multiples façons :
 - ◆ Grilles 2D (carrés, hexagones).
 - ◆ Nombre d'états différents.
 - ◆ Type de couplages.

<http://www.wolframscience.com/nksonline/toc.html>

Exemple - Automates 1D

Classes de modèles

❖ Classes de modèles

❖ Automates 1D

❖ Gaz sur réseau

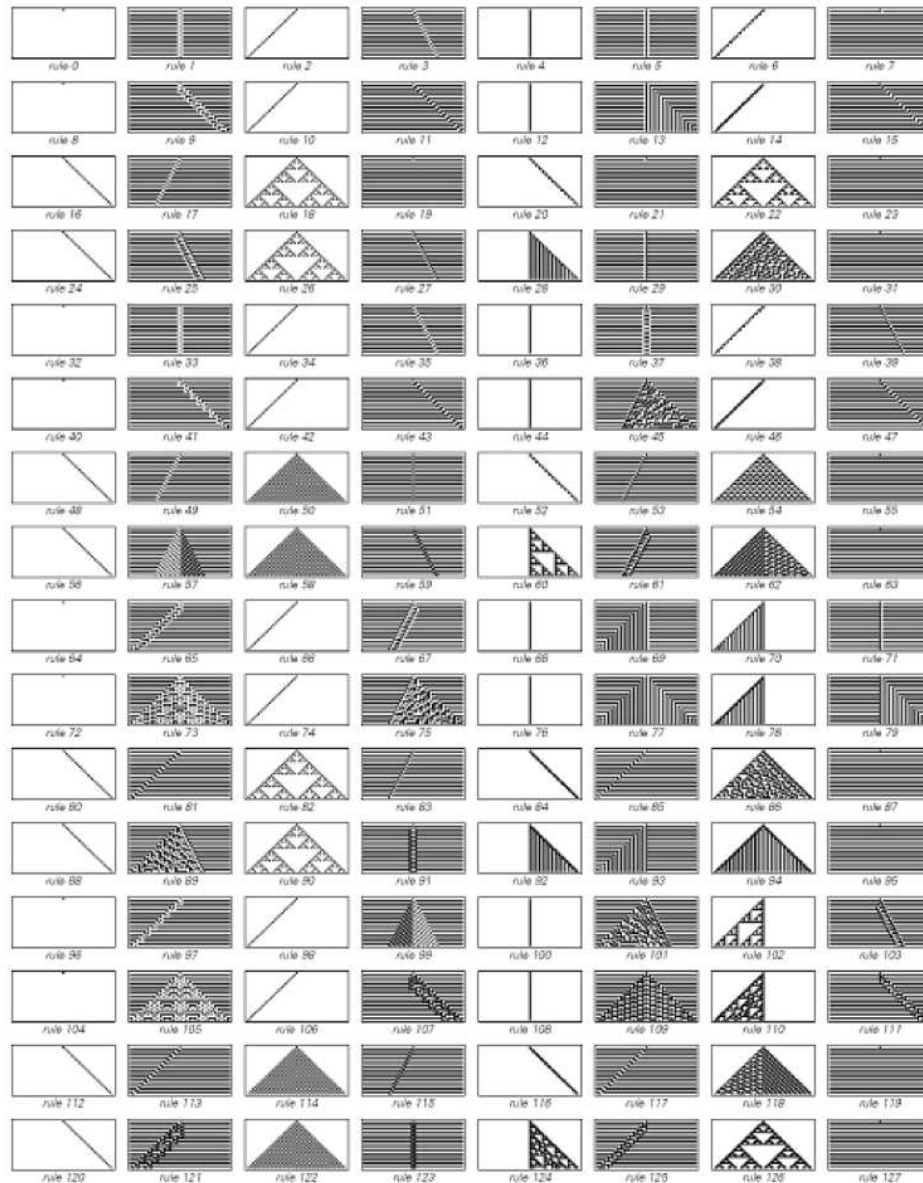
❖ LBM

❖ CML MIS

❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique



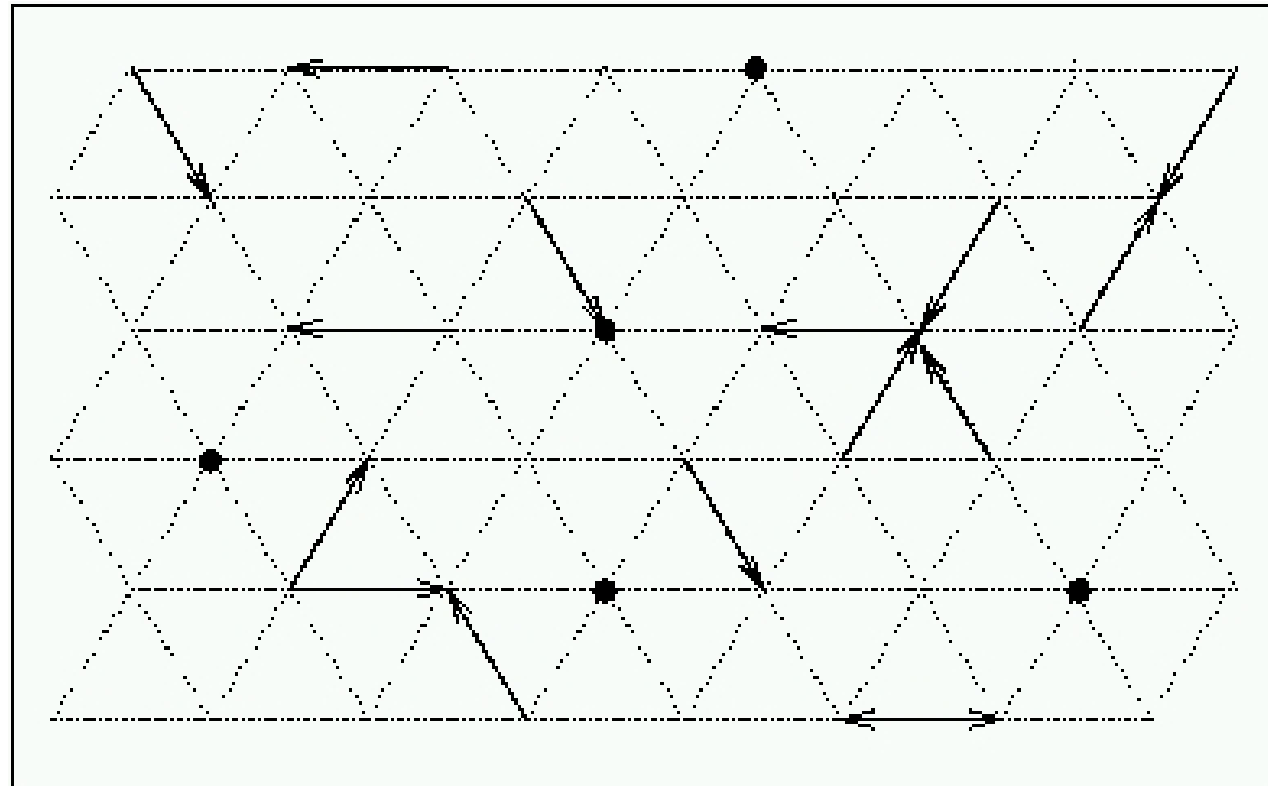
Exemple - Gaz sur Réseau

Classes de modèles

- ❖ Classes de modèles
- ❖ Automates 1D
- ❖ **Gaz sur réseau**
- ❖ LBM
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique



FHP : Frisch, Hasslacher et Pomeau, Phys. Rev. Let., 56,
1505 (1986)

Évolution : Lattice Boltzman Modeling

Classes de modèles

- ❖ Classes de modèles
- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ **LBM**
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique

- Un résumé de la théorie :

“Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models”, Dieter A. Wolf-Gladrow

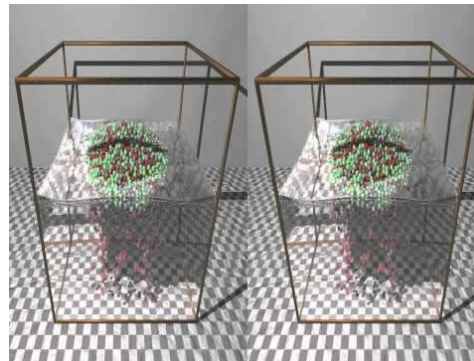
<http://epic.awi.de/3739/>

- Voir aussi

http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_Boltzmann_method

- Applications hydrodynamiques

<http://www10.informatik.uni-erlangen.de/~bogner/>



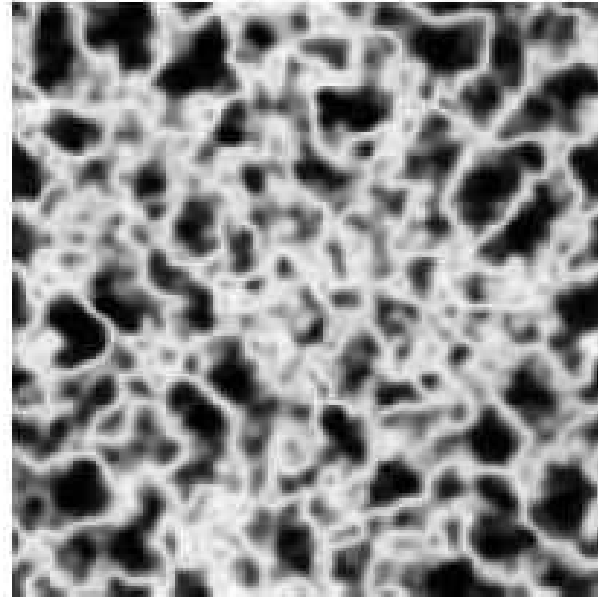
Exemple - CML MIS

Classes de modèles

- ❖ Classes de modèles
- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ LBM
- ❖ **CML MIS**
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique



- Champ de vitesse imposé.
- Dynamique locale bistable.
- Couplage “Non local” de la température par le transfert de rayonnement.

Rousseau et al., MNRAS, 294, 373 (1998)

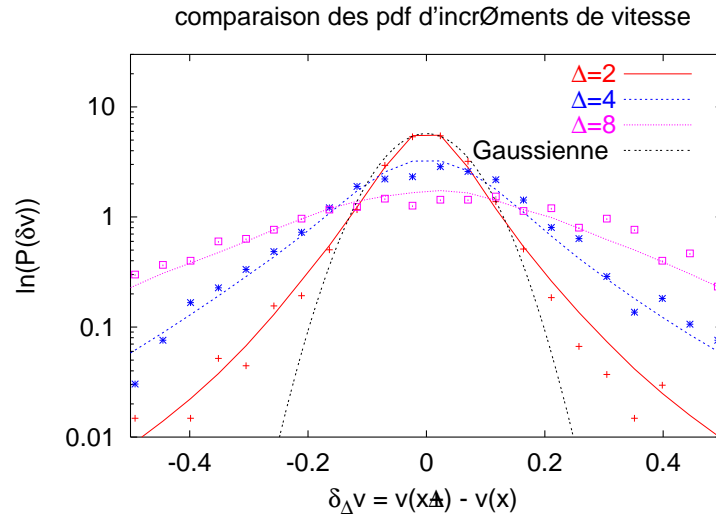
Exemple - MIS

Classes de modèles

- ❖ Classes de modèles
- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ LBM
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique



- Champ de vitesse imposé, mais non-stationnaire.
- Étalonné sur les observations (MIS).
- Formation et disparition de structures.

Decamp & Le Bourlot, A&A, 389, 1055 (2002)

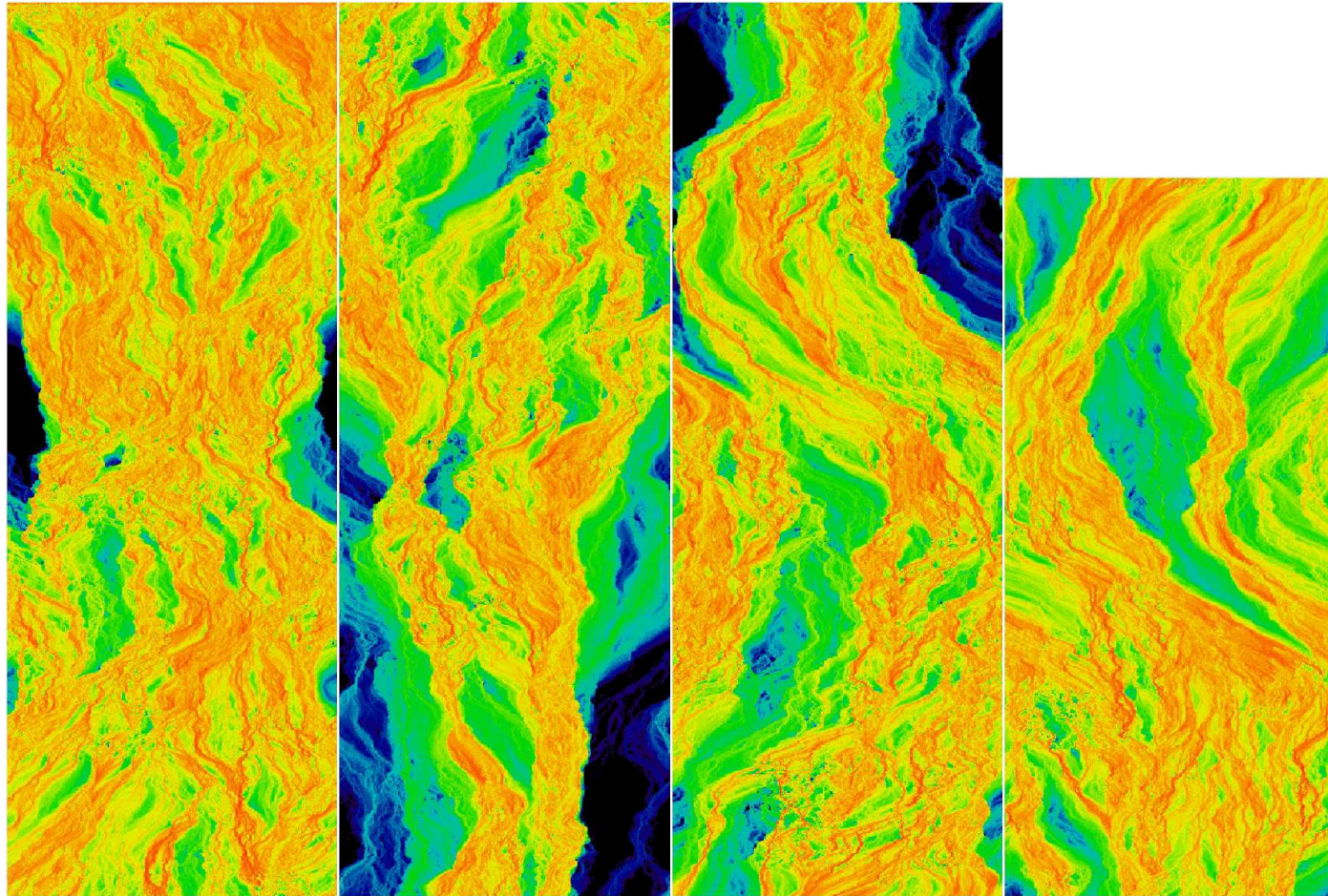
Évolution temporelle

Classes de modèles

- ❖ Classes de modèles
- ❖ Automates 1D
- ❖ Gaz sur réseau
- ❖ LBM
- ❖ CML MIS
- ❖ MIS

Réaction diffusion

Analyse Numérique



Réaction diffusion 1D

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ **Modèle 1D**

❖ Séparation

❖ Solution

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

Equation de réaction diffusion (à une composante) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F(C) + D \Delta C$$

- F : Terme source (thermo-chimiques en général).
- D : Couplage diffusif.

Réaction diffusion 1D

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ **Modèle 1D**

❖ Séparation

❖ Solution

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

Equation de réaction diffusion (à une composante) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F(C) + D \Delta C$$

- F : Terme source (thermo-chimiques en général).
- D : Couplage diffusif.

On étudie au voisinage d'un état stationnaire uniforme.
Soit \bar{C} une solution stationnaire uniforme (i.e. solution de $F(C) = 0$). On pose :

$$c = C - \bar{C}$$

$$f = \left. \frac{\partial F}{\partial c} \right|_{c=0}$$

$$\dot{c} = f c + D \Delta c$$

Une variable : Séparation

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ Modèle 1D

❖ Séparation

❖ Solution

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

On pose :

$$c(x, t) = \phi(t) U(x)$$

$$\frac{1}{D} \left(\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} - f \right) = \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

⇒ Expressions constantes ($= -k^2$) !

$$\dot{\phi}(t) = (f - k^2 D) \phi(t)$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + k^2 U(x) = 0$$

- Spatialement : équation harmonique : $U_k(x) = A \cos kx$
- Dépend des conditions aux limites.

Une variable : Solution

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ Modèle 1D

❖ Séparation

❖ **Solution**

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

Pour un domaine de taille L les conditions aux limites périodiques sont :

$$U_k(0) = U_k(L) \Rightarrow \cos kL = 1$$

$$\frac{\partial U_k(0)}{\partial x} = \frac{\partial U_k(L)}{\partial x} \Rightarrow \sin kL = 0$$

$$k_n = n \frac{2\pi}{L}$$

Soit :

$$c(x, t) = \sum_k a_k(t) U_k(x)$$

- Les $U_k(x)$ forment une base.
- Les $a_k(t)$ sont les amplitudes des différents modes spatiaux. $a_0 = 0$ (C.I.)

Une variable : Solution

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ Modèle 1D

❖ Séparation

❖ **Solution**

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

L'équation de $\phi(t)$ donne :

$$a_k(t) \propto \exp(f - k^2 D) t$$

Contribution croissante (i.e. instable) si :

$$f - k^2 D > 0$$

Terme le plus instable : $n = 1$. Donc, instable si :

$$L > 2\pi \sqrt{\frac{D}{f}}$$

Il y a une longueur critique qui dépend de la dynamique locale (via f) et du couplage spatiale (via D).

Deux variables

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ Modèle 1D

❖ Séparation

❖ Solution

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = f_1(C_1, C_2) + D_1 \Delta C_1$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = f_2(C_1, C_2) + D_2 \Delta C_2$$

- f_1, f_2 : Termes source (thermo-chimiques en général)
- D_1, D_2 : Couplage diffusif (Éventuellement différents)

Deux études possibles :

- Au voisinage d'un état stationnaire uniforme \Rightarrow Semi-analytique.
- En régime non-linéaire développé \Rightarrow Numérique.
- On cherche à développer les solutions sur la même base spatiale des $U_k(x)$.

Linéarisation

Classes de modèles

Réaction diffusion

❖ Modèle 1D

❖ Séparation

❖ Solution

❖ 2 variables

❖ Linéarisation

❖ Solution

❖ Dispersion

❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

Soit \bar{C}_i une solution stationnaire uniforme (i.e. solution de $f_i(C_1, C_2) = 0$). On pose :

$$c_i = C_i - \bar{C}_i$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial c_j}$$

$$\dot{c}_1 = f_{11} c_1 + f_{12} c_2 + D_1 \Delta c_1$$

$$\dot{c}_2 = f_{21} c_1 + f_{22} c_2 + D_2 \Delta c_2$$

Au voisinage de cet état stationnaire, on cherche une solution à variables séparées (en x et en t).

$$c_i(x, t) = \sum_k a_{ik}(t) U_k(x)$$

Solution

Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ **Solution**
- ❖ Dispersion
- ❖ Exemple
- ❖ Au delà des perturbations
- ❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

$$\sum_k \dot{a}_{1k}(t) U_k = f_{11} \sum_k a_{1k} U_k + f_{12} \sum_k a_{2k} U_k - D_1 \sum_k a_{1k} k^2 U_k$$

$$\sum_k \dot{a}_{2k}(t) U_k = f_{21} \sum_k a_{1k} U_k + f_{22} \sum_k a_{2k} U_k - D_2 \sum_k a_{2k} k^2 U_k$$

Les $U_k(x)$ sont indépendants, donc pour chaque k on doit avoir :

$$\dot{a}_{1k}(t) = (f_{11} - D_1 k^2) a_{1k} + f_{12} a_{2k}$$

$$\dot{a}_{2k}(t) = f_{21} a_{1k} + (f_{22} - D_2 k^2) a_{2k}$$

Systeme linéaire. Les $a_{ik}(t)$ s'ammortissent si les valeurs propres de la matrice du système ont des parties réelles négatives.

Équation de dispersion

Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ Solution
- ❖ **Dispersion**
- ❖ Exemple
- ❖ Au delà des perturbations
- ❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

Equation caractéristique :

$$(f_{11} - D_1 k^2 - \lambda) (f_{22} - D_2 k^2 - \lambda) - f_{12} f_{21} = 0$$

ou bien (avec $Tr = f_{11} + f_{22}$ et $Dt = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$:

$$\lambda^2 + \lambda [k^2 (D_1 + D_2) - Tr]$$

$$+ k^2 (D_1 D_2 k^2 - f_{11} D_2 - f_{22} D_1) + Dt = 0$$

- Tous les modes tels que $\Re(\lambda(k)) < 0$ s'amortissent.
- Le mode observé est le $\sup \lambda(k) > 0$
- Valable seulement près de l'état stationnaire uniforme !

Exemple

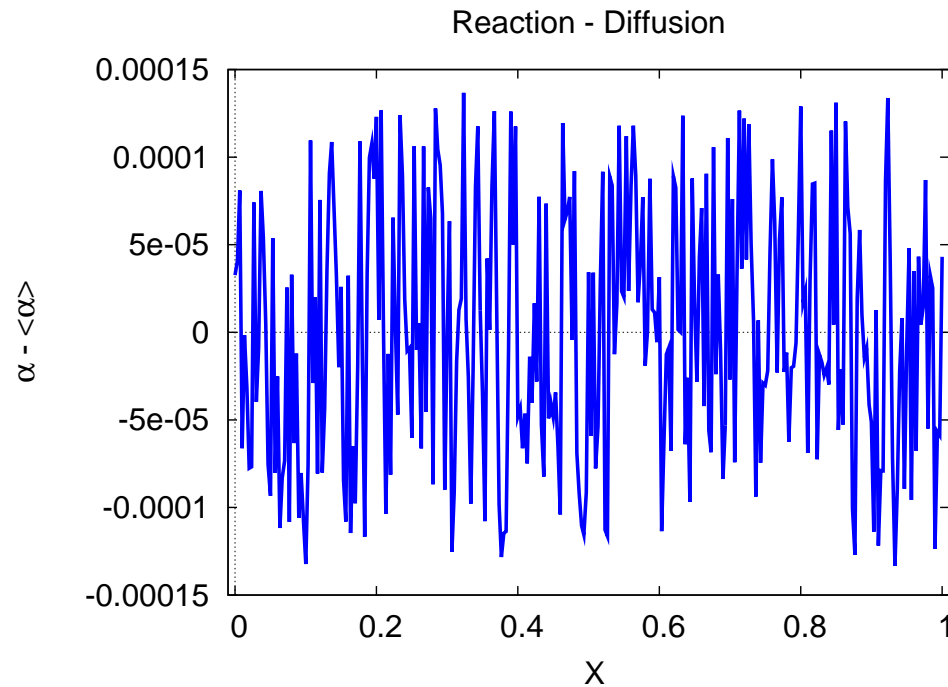
Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ Solution
- ❖ Dispersion
- ❖ Exemple
- ❖ Au delà des perturbations
- ❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

- On part de l'état stationnaire instable.
- On impose une perturbation aléatoire faible.



Voir animation

Exemple

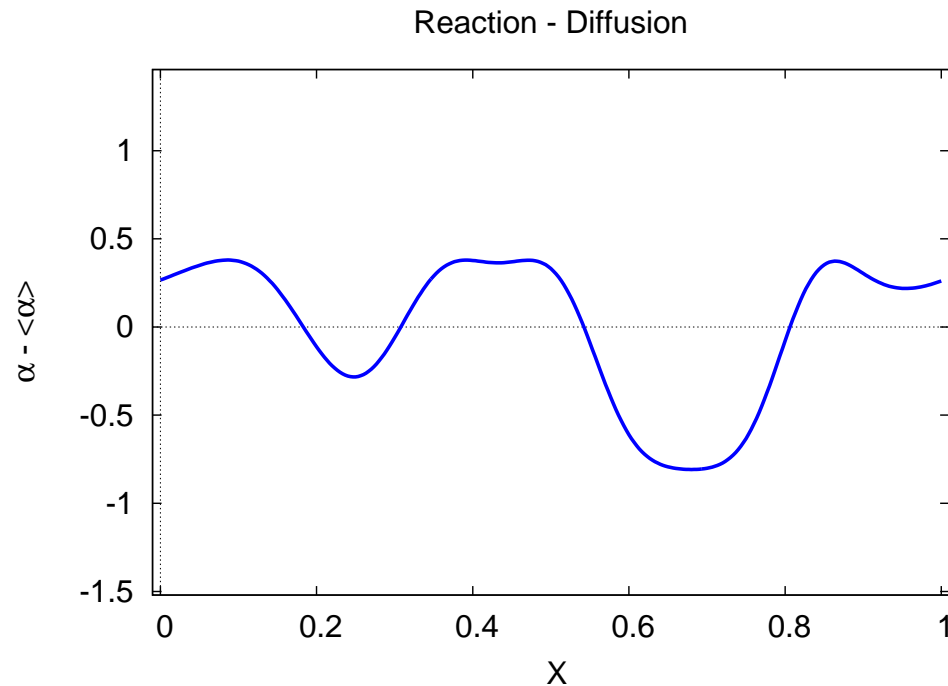
Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ Solution
- ❖ Dispersion
- ❖ Exemple
- ❖ Au delà des perturbations
- ❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

- On laisse évoluer quelques temps.
- L'oscillation se développe et la diffusion "lisse" le front.



Voir animation

Au delà des perturbations

Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ Solution
- ❖ Dispersion
- ❖ Exemple

❖ Au delà des perturbations

- ❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

- En général, pas (ou peu) de résultat analytique.
- Résolution numérique obligatoire.
- Il faut s'adapter à chaque cas particulier.
- Un algorithme stable pour la réaction diffusion : Crank-Nicholson.
- Ici : conditions aux limites périodiques.

Solution stationnaire

Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ Solution
- ❖ Dispersion
- ❖ Exemple
- ❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

Pour un front de réaction diffusion à vitesse constante v , on pose $y = x + vt$, et on a :

$$\frac{dC}{dt} = 0 = \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} = v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial t}$$

D'où :

$$D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} + v \frac{\partial C_1}{\partial y} + f_1(C_1, C_2) = 0$$

$$D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} + v \frac{\partial C_2}{\partial y} + f_2(C_1, C_2) = 0$$

Systeme d'équations différentielles ordinaires à conditions aux limites.

Solution stationnaire asymptotique

Classes de modèles

Réaction diffusion

- ❖ Modèle 1D
- ❖ Séparation
- ❖ Solution
- ❖ 2 variables
- ❖ Linéarisation
- ❖ Solution
- ❖ Dispersion
- ❖ Exemple
- ❖ Au delà des perturbations

❖ Solution stationnaire

Analyse Numérique

On peut chercher (pour un système bistable) une solution asymptotique exponentielle :

$$C_1(y) = \bar{C}_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{\lambda}\right) \right)$$

$$C_2(y) = \bar{C}_2 \left(1 + \exp\left(-\frac{y}{\lambda}\right) \right)$$

$$f_1(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = f_2(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = 0$$

Après quelques manipulations, on obtient deux équations à deux inconnues v et λ :

$$v\lambda - \lambda^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial C_1} - \frac{\partial f_1}{\partial C_2} \frac{\bar{C}_2}{\bar{C}_1} \right) = D_1$$

$$v\lambda + \lambda^2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial C_1} - \frac{\partial f_2}{\partial C_2} \frac{\bar{C}_2}{\bar{C}_1} \right) = D_2$$

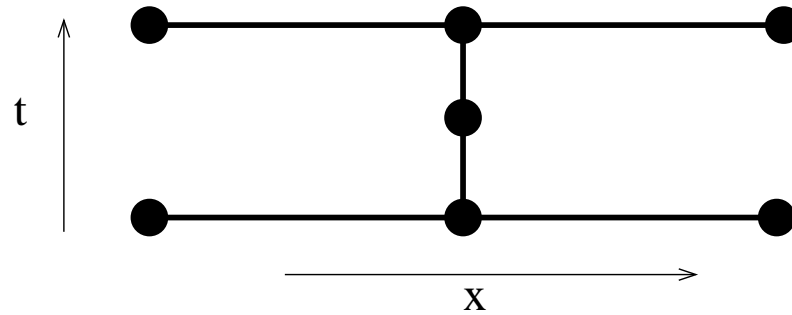
Crank-Nicholson

Classes de modèles

Réaction diffusion

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson



$$\frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i,j} - C^{i-1,j}}{h} \quad \frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i+1,j} - C^{i,j}}{h}$$
$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} - \frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} \right) = \frac{C^{i-1,j} - 2C^{i,j} + C^{i+1,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial C^{i,j+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{C^{i,j+1} - C^{i,j}}{k}$$

Crank-Nicholson

Classes de modèles

Réaction diffusion

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

En $(i, j + \frac{1}{2})$:

$$\frac{C_l^{i,j+1} - C_l^{i,j}}{k} = f_l(C_1, C_2)$$

$$+ \frac{D_l}{2} \left[\frac{C_l^{i-1,j+1} - 2C_l^{i,j+1} + C_l^{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{C_l^{i-1,j} - 2C_l^{i,j} + C_l^{i+1,j}}{h^2} \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned} & -r_l C_l^{i-1,j+1} + (1 + 2r_l) C_l^{i,j+1} - r_l C_l^{i+1,j+1} \\ & = k f_l(C_1^{i,j}, C_2^{i,j}) + r_l C_l^{i-1,j} + (1 - 2r_l) C_l^{i,j} + r_l C_l^{i+1,j} \\ & \quad r_l = \frac{k D_l}{2 h^2} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Crank-Nicholson

Classes de modèles

Réaction diffusion

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

$$\begin{pmatrix} 1 + 2r & -r & 0 & 0 & -r \\ -r & 1 + 2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 + 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ \vdots \\ C^n \end{pmatrix}^{j+1}$$
$$= k \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 2r & r & 0 & 0 & r \\ r & 1 - 2r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 - 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ \vdots \\ C^n \end{pmatrix}^j$$