Turbulence - II

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

27 Novembre 2013

Conservation de l'impulsion

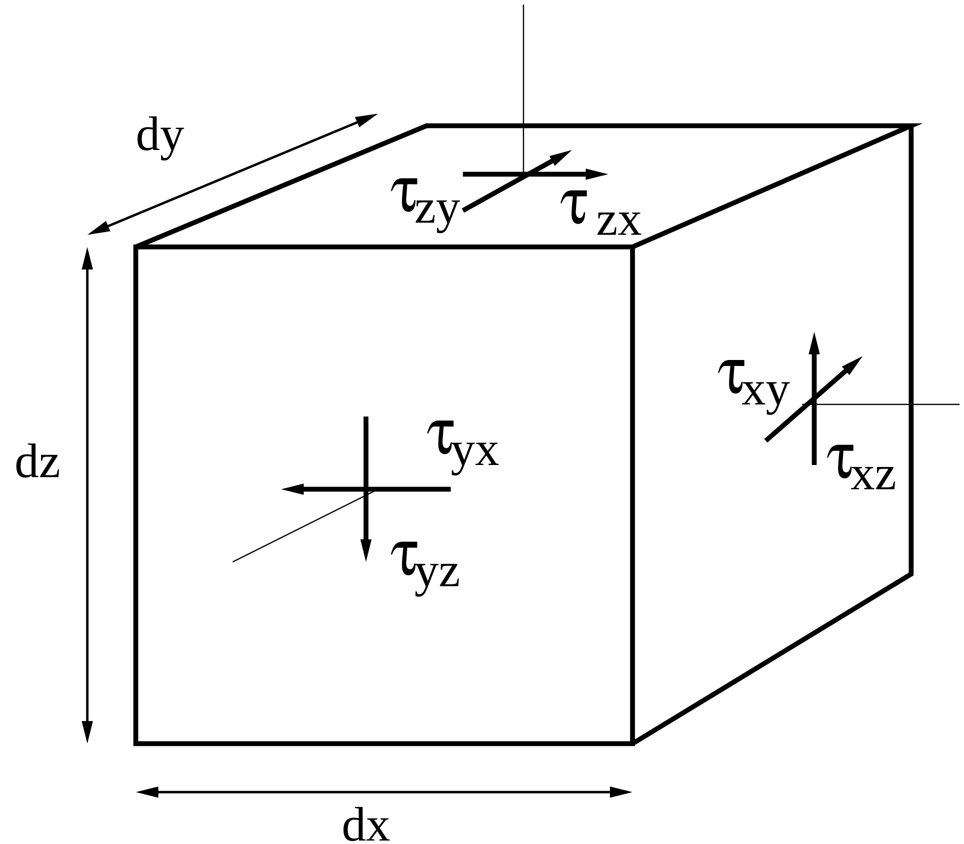
En suivant l'évolution d'un volume V

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \overrightarrow{v}\, dV = \int_V \overrightarrow{F_V}\, dV + \int_S \bar{\bar{\sigma}}\, dS$$

- $\overrightarrow{F_V}$: Efforts de volume
- $\bar{\bar{\sigma}}$: Tenseur des efforts de surface
  - Composante normale : effort de pression.
  - Composante tangentielle : cisaillement.

Les composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$ sont des forces par unité de surface, soit des contraintes (homogène à une pression), notées σ_{ij}.

Tenseur des contraintes



1er indice : facette, 2ème indice : direction

Tenseur des contraintes

On montre que (fluide “Newtonien”) :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u})\,\delta_{ij}\right)$$

Voir : `http://www.whoi.edu/profile/jpedlosky/` Course 12.800 Chap 3.

- Décomposition :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \tau_{ij} = -P\,\delta_{ij} + 2\rho\,\nu\,S_{ij}$$

- Fluide au repos :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij}$$

  $P \Rightarrow$ pression statique.

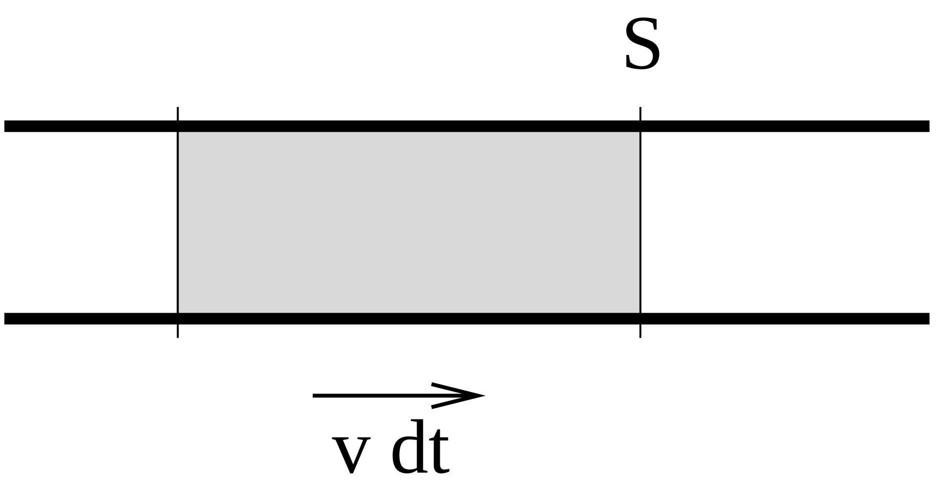
- μ : Viscosité dynamique.

Modèle du $1/6$ *pour la viscosité*

- Les molécules ont toutes la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'agitation thermique, et se déplacent suivant les axes.

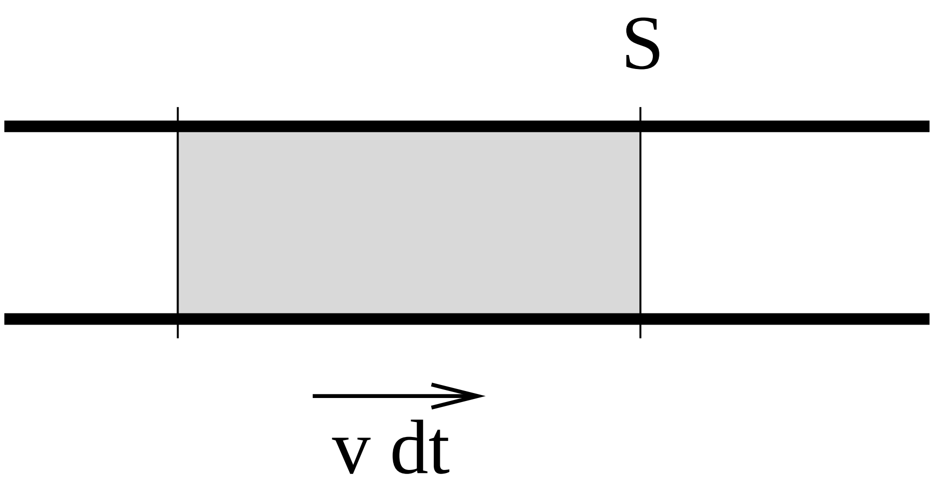
Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Les molécules ont toutes la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'agitation thermique, et se déplacent suivant les axes.



Modèle du $1/6$ *pour la viscosité*

- Les molécules ont toutes la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'agitation thermique, et se déplacent suivant les axes.



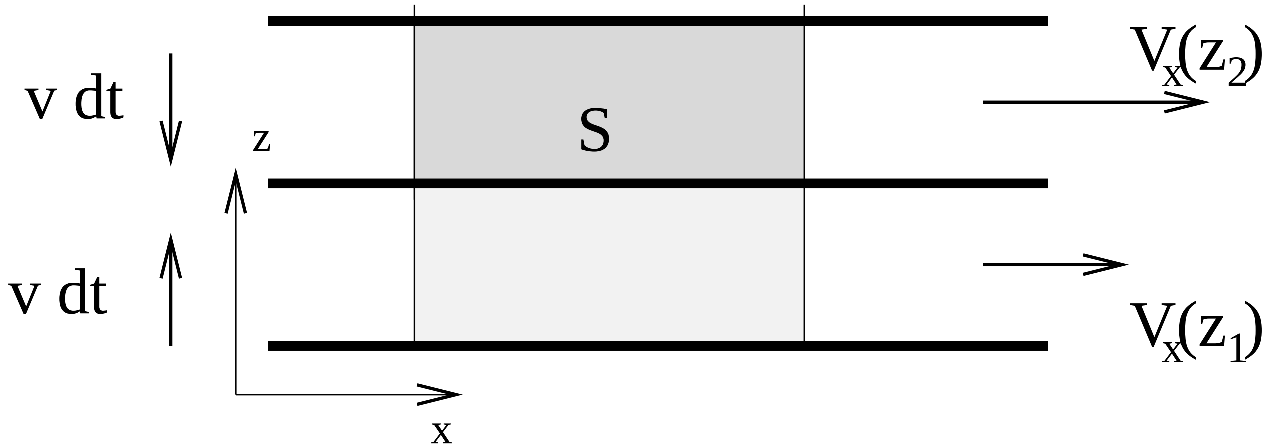
- Libre parcours moyen λ :

$$\lambda \, \sigma \, n = 1$$

σ : section efficace de collision
n : densité

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Viscosité : transfert d'impulsion $\perp$.



Écoulement horizontal, avec un gradient vertical de la vitesse d'ensemble horizontale (cisaillement).

Modèle du $1/6$ *pour la viscosité*

- Flux de quantité de mouvement :

$$d\overrightarrow{p} = \frac{1}{6}\, n\, S\, \bar{v}\, dt\, m\, \overrightarrow{V_x}(z_1) - \frac{1}{6}\, n\, S\, \bar{v}\, dt\, m\, \overrightarrow{V_x}(z_2)$$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{6}\, n\, \bar{v}\, m\, \left(\overrightarrow{V_x}(z_1) - \overrightarrow{V_x}(z_2)\right)$$

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Flux de quantité de mouvement :

$$d\overrightarrow{p} = \frac{1}{6}\, n\, S\, \bar{v}\, dt\, m\, \overrightarrow{V_x}(z_1) - \frac{1}{6}\, n\, S\, \bar{v}\, dt\, m\, \overrightarrow{V_x}(z_2)$$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{6}\, n\, \bar{v}\, m\, \left(\overrightarrow{V_x}(z_1) - \overrightarrow{V_x}(z_2)\right)$$

- Avec $dz \sim 2\,\lambda$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = -\frac{1}{3}\, n\, \bar{v}\, m\, \lambda\, \frac{\partial \overrightarrow{V_x}}{\partial z}$$

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Flux de quantité de mouvement :

$$d\,\overrightarrow{p} = \frac{1}{6}\,n\,S\,\bar{v}\,dt\,m\,\overrightarrow{V_x}(z_1) - \frac{1}{6}\,n\,S\,\bar{v}\,dt\,m\,\overrightarrow{V_x}(z_2)$$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\,\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{6}\,n\,\bar{v}\,m\,\left(\overrightarrow{V_x}(z_1) - \overrightarrow{V_x}(z_2)\right)$$

- Avec $dz \sim 2\,\lambda$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\,\overrightarrow{p}}{dt} = -\frac{1}{3}\,n\,\bar{v}\,m\,\lambda\,\frac{\partial\overrightarrow{V_x}}{\partial z}$$

$$\mu = \frac{1}{3}\,\rho\,\bar{v}\,\lambda = \frac{1}{3}\,\frac{m\,\bar{v}}{\sigma}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{v}}{n\,\sigma}$$

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Flux de quantité de mouvement :

$$d\overrightarrow{p} = \frac{1}{6}\, n\, S\, \bar{v}\, dt\, m\, \overrightarrow{V_x}(z_1) - \frac{1}{6}\, n\, S\, \bar{v}\, dt\, m\, \overrightarrow{V_x}(z_2)$$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{6}\, n\, \bar{v}\, m\, \left(\overrightarrow{V_x}(z_1) - \overrightarrow{V_x}(z_2)\right)$$

- Avec $dz \sim 2\,\lambda$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = -\frac{1}{3}\, n\, \bar{v}\, m\, \lambda\, \frac{\partial \overrightarrow{V_x}}{\partial z}$$

$$\mu = \frac{1}{3}\,\rho\,\bar{v}\,\lambda = \frac{1}{3}\,\frac{m\,\bar{v}}{\sigma}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{v}}{n\,\sigma}$$

- Si $n = Cte \Rightarrow \nu \propto T^{1/2}$
- Si $P = Cte \Rightarrow \nu \propto T^{3/2}$ (pour un gaz parfait)

Navier-Stokes

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \overrightarrow{v}\, dV = \int_V \overrightarrow{F_V}\, dV + \int_S \bar{\bar{\sigma}}\, dS$$

$$\int_V \frac{D}{Dt}(\rho \overrightarrow{v})\, dV = \int_V \overrightarrow{\nabla}\,(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \overrightarrow{n})\, dV + \int_V \overrightarrow{F_V}\, dV$$

Si le fluide est incompressible :

$$(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \overrightarrow{n})_i = \sigma_{ij} \cdot n_j = -P\,\delta_{ij} \cdot n_j + 2\rho\,\nu\, S_{ij} \cdot n_j$$

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla}\,(P) + \rho\nu\,\nabla^2 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{F}$$

Notations - 2

- ν : Viscosité cinématique. $[\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}]$
- $\mu = \rho\,\nu$: Viscosité dynamique. $[\mathrm{M}\,\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{T}^{-1}]$
- $\tau_{ij} = \rho\,\nu\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\}$: Tenseur des contraintes (fluide Newtonien incompressible)
- $S_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\}$: Tenseur des “taux de contraintes”

$$\tau_{ij} = 2\,\rho\,\nu\,S_{ij}$$

Équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)(\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla}(P) + \rho\nu \nabla^2 \vec{v}$$

- Temps de dissipation :

$$t_\nu = \frac{l^2}{\nu}$$

- Temps dynamique :

$$t_d = \frac{l}{v}$$

- Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{t_\nu}{t_d} = \frac{l\,v}{\nu}$$

Équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla}(P) + \rho\nu\, \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Forces d'inertie :

$$F_{in} \sim \frac{\rho\, v^2}{l}$$

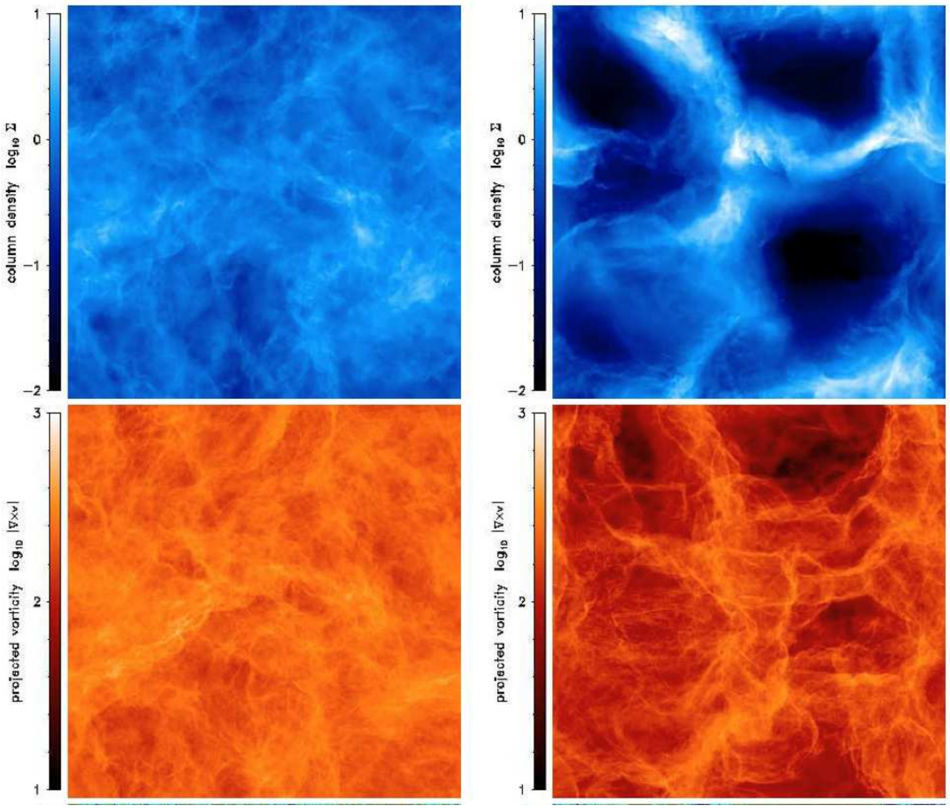
- Forces de dissipation :

$$F_{vis} \sim \frac{\rho\nu\, v}{l^2}$$

- Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{t_\nu}{t_d} = \frac{F_{in}}{F_{vis}} = \frac{l\, v}{\nu}$$

Incompressibilité



Federath et al. (2009)

Incompressibilité

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0} \ ; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

Incompressibilité

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0} \;; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \quad \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0\right)$$

Incompressibilité

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0}\ ; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \quad \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0\right)$$

Si :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = a\,; \quad \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$$

Incompressibilité

Décomposition de Helmholz :

$$\vec{v} = \vec{v_c} + \vec{v_s}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v_c} = \vec{0}\ ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v_s} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0\right)$$

Si :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = a\ ; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{u}$$

Alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = a\ ; \quad \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \vec{u}$$

$$\nabla^2\phi = a\ ; \quad \nabla^2\vec{A} = \vec{u}$$

Equations de Poisson.

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$$

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\,(\overrightarrow{v}) = 0$$

Donc :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_s} \quad (\phi = 0)$$

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$$

Donc :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_s} \qquad (\phi = 0)$$

Et :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\,\nabla^2\overrightarrow{v}$$

Admis dans (presque) toute la suite

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \phi$$

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \phi$$

Si $\rho = Cte$ et $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F}$$

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi$$

Si $\rho = Cte$ et $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\overrightarrow{v}) = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{F}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\overrightarrow{v}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}v^2.$$

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\phi$$

Si $\rho = Cte$ et $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\vec{F}$$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)(\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2$. Si $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi$:

$$\vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + \vec{\nabla}\frac{P}{\rho} + \vec{\nabla}\frac{\Psi}{\rho} = \vec{0}$$

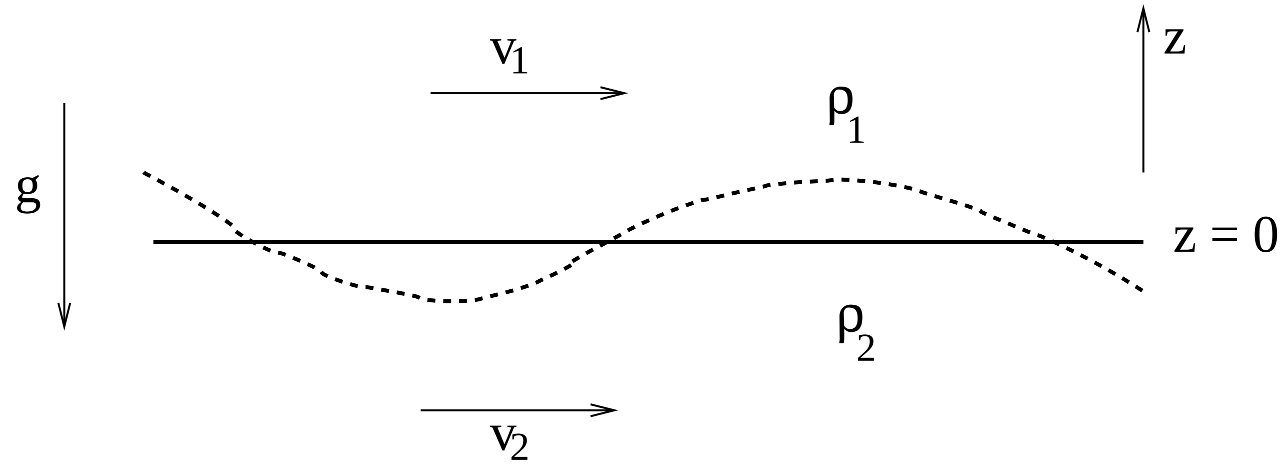
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} = f(t)$$

Bernoulli !

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Instabilité de cisaillement.



Au premier ordre :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\, v\, \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{P}{\rho} + g\, z = 0$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Perturbation de vitesse :

$$\overrightarrow{u_i} = v_i \overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{\nabla} \phi_i$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Perturbation de vitesse :

$$\overrightarrow{u_i} = v_i \overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{\nabla} \phi_i$$

ϕ_i Solution d'une équation de Laplace, et 0 à ∞ :

$$\phi_1 = C_1 \exp\left(-i\omega t + ikx - kz\right)$$

$$\phi_2 = C_2 \exp\left(-i\omega t + ikx + kz\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Perturbation de vitesse :

$$\overrightarrow{u_i} = v_i \overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{\nabla} \phi_i$$

ϕ_i Solution d'une équation de Laplace, et 0 à ∞ :

$$\phi_1 = C_1 \exp\left(-i\omega t + ikx - kz\right)$$

$$\phi_2 = C_2 \exp\left(-i\omega t + ikx + kz\right)$$

Condition à l'interface :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} ; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On évalue au premier ordre, en $z = 0$.

$$-k\, C_1 = -i\omega\, A + ik\, v_1\, A\,; \quad -k\, C_2 = -i\omega\, A + ik\, v_2\, A$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On évalue au premier ordre, en $z = 0$.

$$-k\,C_1 = -i\omega\,A + ik\,v_1\,A\,; \quad -k\,C_2 = -i\omega\,A + ik\,v_2\,A$$

Continuité de la pression :

$$\rho_1\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_1^2 + g\,z\right) = \rho_2\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_2^2 + g\,z\right)$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_1\,\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\zeta\right) = \rho_2\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_2\,\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\zeta\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On évalue au premier ordre, en $z = 0$.

$$-k\,C_1 = -i\omega\,A + ik\,v_1\,A\,; \quad -k\,C_2 = -i\omega\,A + ik\,v_2\,A$$

Continuité de la pression :

$$\rho_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_1^2 + gz\right) = \rho_2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_2^2 + gz\right)$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_1\,\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + g\zeta\right) = \rho_2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_2\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + g\zeta\right)$$

En $z = 0$:

$$\rho_1\,(-i\omega\,C_1 + ik\,v_1\,C_1 + gA) = \rho_2\,(-i\omega\,C_2 + ik\,v_2\,C_2 + gA)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

En substituant :

$$(\omega - k\bar{v})^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)\ gk}{(\rho_1 + \rho_2)} - \frac{\rho_1 \rho_2\ (v_1 - v_2)^2\ k^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$$

Avec :

$$\bar{v} = \frac{(\rho_1\, v_1 + \rho_2\, v_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

En substituant :

$$(\omega - k\bar{v})^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)\ gk}{(\rho_1 + \rho_2)} - \frac{\rho_1 \rho_2\ (v_1 - v_2)^2\ k^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$$

Avec :

$$\bar{v} = \frac{(\rho_1\, v_1 + \rho_2\, v_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}$$

- Instable si $RHS < 0$.
  - 1er terme : stratification (stabilise)
  - 2ème terme : cisaillement (déstabilise)
- Si $v_1 = v_2 \Rightarrow$ Instabilité de Rayleigh-Taylor
- Petites échelles toujours instables.
- Condition suffisantes (perturbation irrotationnelle).

Localisation

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu \, \overrightarrow{\nabla} \cdot \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

Localisation

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \overrightarrow{\nabla} \cdot \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} \right) - \overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} \right)$$

Localisation

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu \, \vec{\nabla} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) - \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\right) = -\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\right)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{P}{\rho}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}\right)$$

Équation de Poisson, donc, si $\vec{v} \to \vec{0}$ à l'infini (Biot et Savart) :

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{4\pi} \int_V \frac{\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}\right)\right]'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\mathbf{r}'$$

Équation **non-locale** !

Énergie

$$\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\,(P) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2\vec{v}$$

Énergie

$$\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\,(P) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\vec{v}\right) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

Énergie

$$\overrightarrow{v} \cdot \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}(P) + \nu \overrightarrow{v} \cdot \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \nu \overrightarrow{v} \cdot \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\nu \overrightarrow{v} \cdot \nabla^2 \overrightarrow{v} = \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

Énergie

$$\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\,(P) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\vec{v}\right) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v} = \frac{1}{\rho}\,v_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\vec{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\vec{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

Énergie

$$\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(P) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2\vec{v}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\vec{v}\right) + \nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2\vec{v}$$

$$\nu\,\vec{v} \cdot \nabla^2\vec{v} = \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i\tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij}S_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\vec{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\vec{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i\tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij}S_{ij}$$

Avec :

$$\int_V \nabla\left(X\vec{v}\right) dV = \int_S X\,\vec{v} \cdot \vec{n}\,dS$$

on obtient...

Énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

En sommant sur un volume de contrôle :

Énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

En sommant sur un volume de contrôle :

- $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{v^2}{2}\right) dV =$ (variation d'énergie dans V)

Énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i\tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij}S_{ij}$$

En sommant sur un volume de contrôle :

- $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{v^2}{2}\right) dV =$ (variation d'énergie dans V)
- $-\int_S \frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Énergie cin. advectée dans V)

Énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i\tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij}S_{ij}$$

En sommant sur un volume de contrôle :

- $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{v^2}{2}\right) dV =$ (variation d'énergie dans V)
- $-\int_S \frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Énergie cin. advectée dans V)
- $-\int_S \frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Travail forces de pressions sur S)

Énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

En sommant sur un volume de contrôle :

- $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{v^2}{2}\right) dV =$ (variation d'énergie dans V)
- $-\int_S \frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Énergie cin. advectée dans V)
- $-\int_S \frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Travail forces de pressions sur S)
- $+\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) dV$ (Travail forces de viscosité sur S)

Énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla.\left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) - \nabla.\left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

En sommant sur un volume de contrôle :

- $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{v^2}{2}\right) dV =$ (variation d'énergie dans V)
- $-\int_S \frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Énergie cin. advectée dans V)
- $-\int_S \frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\, dS$ (Travail forces de pressions sur S)
- $+\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) dV$ (Travail forces de viscosité sur S)
- $-\int_V 2\nu S_{ij} S_{ij}\, dV$ (Énergie dissipée en chaleur)

$$\epsilon = 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

Conservation

- Masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho \overrightarrow{v} \right) = 0$$

Conservation

- Masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho \overrightarrow{v}\right) = 0$$

- Impulsion :

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \left(\rho \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla} \left(P\right) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} + \overrightarrow{F}$$

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \left(\rho \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla} \left(P\right) + \rho \nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{F}$$

Conservation

- Masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho \overrightarrow{v}\right) = 0$$

- Impulsion :

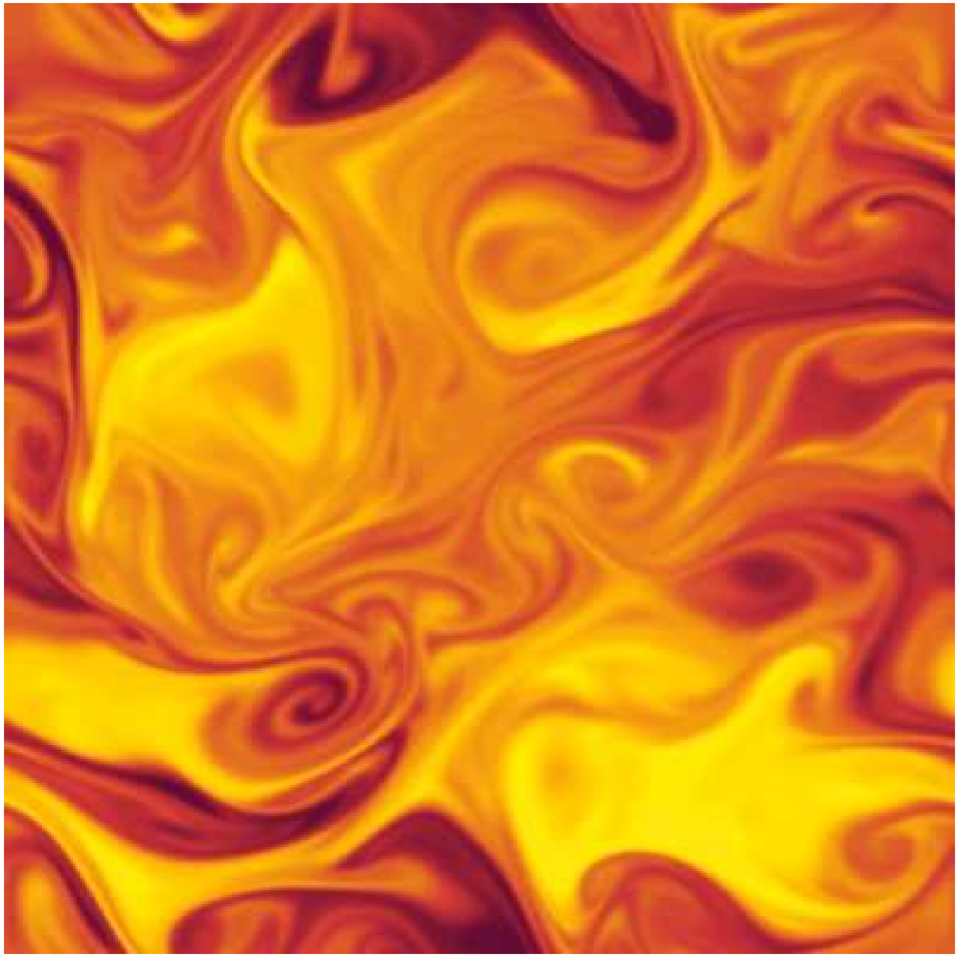
$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\left(\rho \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla}\left(P\right) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} + \overrightarrow{F}$$

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\left(\rho \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla}\left(P\right) + \rho\nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{F}$$

- Énergie (incompressible) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{v^2}{2}\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{P}{\rho}\overrightarrow{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$$

Vorticité



Vorticité

- $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}$: Vorticité. $\omega_i = \partial_j u_k - \partial_k u_j$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\omega} = 0$

Vorticité

- $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}$: Vorticité. $\omega_i = \partial_j u_k - \partial_k u_j$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\omega} = 0$
- $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\,\omega^2$: Enstrophie.

Vorticité

- $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}$: Vorticité. $\omega_i = \partial_j u_k - \partial_k u_j$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\omega} = 0$
- $\frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2$: Enstrophie.

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla} \frac{P}{\rho} + \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\omega}) - \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \overrightarrow{\nabla} \wedge \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{\omega}}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\omega}) + \nu \nabla^2 \overrightarrow{\omega}$$

ω est une quantité **locale** !

Fluctuations

Fluctuations

On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est une fluctuation autour de l'écoulement moyen $\overrightarrow{V}$ (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Fluctuations

On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est une fluctuation autour de l'écoulement moyen $\overrightarrow{V}$ (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

On prend la moyenne :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i + \overline{\rho \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) u_i} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}$$

Fluctuations

On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est une fluctuation autour de l'écoulement moyen $\overrightarrow{V}$ (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

On prend la moyenne :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i + \overline{\rho \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) u_i} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}$$

$$\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) u_i = \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i u_j \right)$$

Fluctuations

Donc :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\tau_{ij}} - \rho \overline{u_i u_j} \right]$$

Fluctuations

Donc :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\tau_{ij}} - \rho \overline{u_i u_j} \right]$$

On défini le “tenseur des contraintes de Reynolds” par :

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u_i u_j}$$

C’est le flux d’impulsion moyen induit par la turbulence.

Fermeture

- Pour calculer $\overrightarrow{V}$ il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j}$

Fermeture

- Pour calculer $\overrightarrow{V}$ il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j}$
- Pour calculer $\overline{u_i u_j}$, il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j u_k}$

Fermeture

- Pour calculer $\overrightarrow{V}$ il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j}$
- Pour calculer $\overline{u_i u_j}$, il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j u_k}$
- Etc...

Il faut une hypothèse “ad hoc” pour “fermer” le système.

Voir plus loin le modèle “$k - \epsilon$”