Turbulence - II

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

21 Novembre 2012

Fluctuations

Fluctuations

On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est une fluctuation autour de l'écoulement moyen $\overrightarrow{V}$ (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Fluctuations

On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est une fluctuation autour de l'écoulement moyen $\overrightarrow{V}$ (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

On prend la moyenne :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i + \overline{\rho \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) u_i} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}$$

Fluctuations

On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est une fluctuation autour de l'écoulement moyen $\overrightarrow{V}$ (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

On prend la moyenne :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i + \overline{\rho \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) u_i} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}$$

$$\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) u_i = \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$$

Donc :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\tau_{ij}} - \rho \overline{u_i u_j} \right]$$

Fluctuations

Donc :

$$\rho\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)V_i = -\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\tau_{ij}} - \rho\overline{u_i u_j}\right]$$

On défini le "tenseur des contraintes de Reynolds" par :

$$\tau_{ij}^R = -\rho\overline{u_i u_j}$$

C'est le flux d'impulsion moyen induit par la turbulence.

Fermeture

- Pour calculer $\overrightarrow{V}$ il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j}$

Fermeture

- Pour calculer $\overrightarrow{V}$ il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j}$
- Pour calculer $\overline{u_i u_j}$, il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j u_k}$

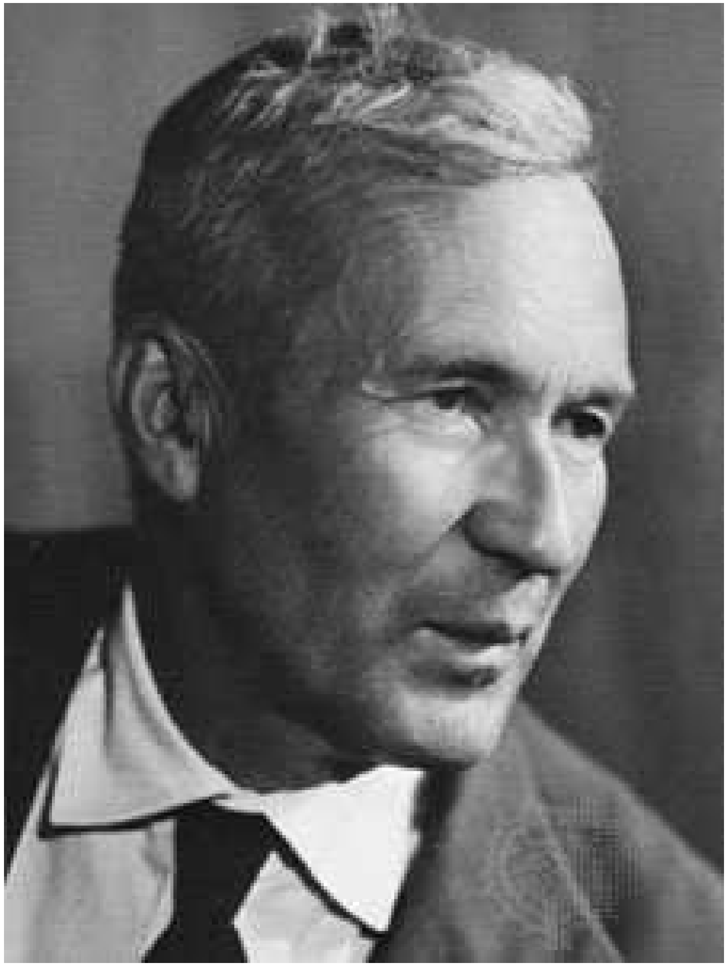
Fermeture

- Pour calculer $\overrightarrow{V}$ il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j}$
- Pour calculer $\overline{u_i u_j}$, il faut une équation donnant $\overline{u_i u_j u_k}$
- Etc...

Il faut une hypothèse “ad hoc” pour “fermer” le système.

Voir plus loin le modèle “$k - \epsilon$”

Kolmogorov



(1903 - 1987)

Turbulence Développée

- Hypothèses
  - ✦ Pas de mouvement d'ensemble.

Turbulence Développée

- Hypothèses
  - Pas de mouvement d'ensemble.
  - Homogène.

Turbulence Développée

- Hypothèses
  - Pas de mouvement d'ensemble.
  - Homogène.
  - Isotrope.

Turbulence Développée

- Hypothèses
  - ✦ Pas de mouvement d'ensemble.
  - ✦ Homogène.
  - ✦ Isotrope.
  - ✦ Stationnaire.

Turbulence Développée

- Hypothèses
  - ✦ Pas de mouvement d'ensemble.
  - ✦ Homogène.
  - ✦ Isotrope.
  - ✦ Stationnaire.

Donc :

$$\left\langle \overrightarrow{V} \right\rangle = \overrightarrow{0}$$

$$u^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{3}\mathbf{u}^2 \right\rangle$$

Échelles

A une échelle l caractérisée par une vitesse typique u_l, on a :

Échelles

A une échelle l caractérisée par une vitesse typique u_l, on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$: Temps de retournement.

Échelles

A une échelle l caractérisée par une vitesse typique u_l, on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$: Temps de retournement.
- $\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{t_l} = \frac{u_l^3}{l}$: Taux de dissipation de l'énergie.

Échelles

A une échelle l caractérisée par une vitesse typique u_l, on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$: Temps de retournement.
- $\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{t_l} = \frac{u_l^3}{l}$: Taux de dissipation de l'énergie.
- $R_l = \frac{l\,u_l}{\nu}$: Reynolds local.

Échelles

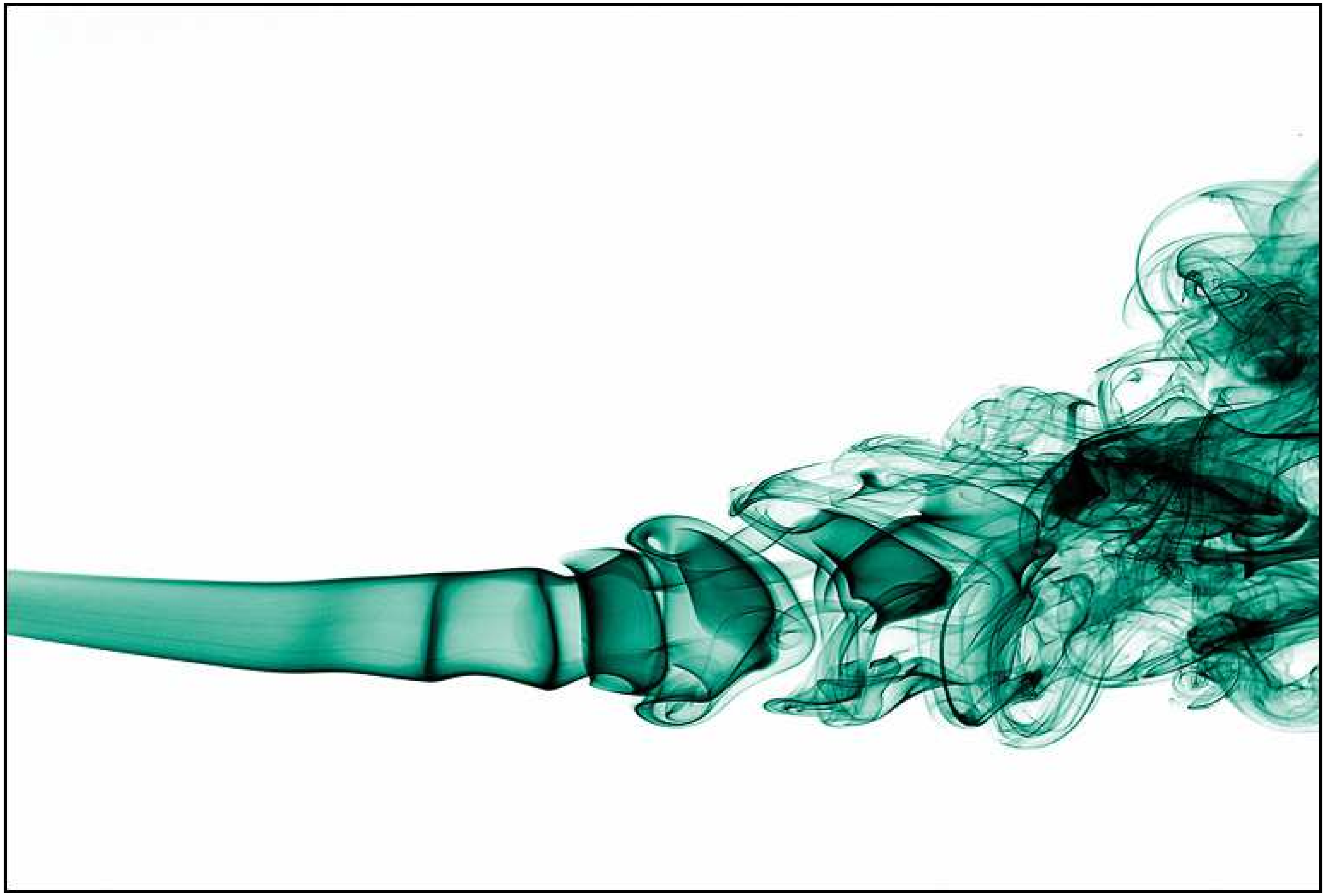
A une échelle l caractérisée par une vitesse typique u_l, on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$: Temps de retournement.
- $\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{t_l} = \frac{u_l^3}{l}$: Taux de dissipation de l'énergie.
- $R_l = \frac{l\, u_l}{\nu}$: Reynolds local.

Échelle de Kolmogorov η : dissipation visqueuse efficace

$$R_\eta = \frac{\eta\, u_\eta}{\nu} = 1$$

Cascade de Richardson



http://www.sensitivelight.com/smoke2/

Cascade de Richardson

- L'énergie est injectée à l'échelle L (grandes échelles)

Cascade de Richardson

- L'énergie est injectée à l'échelle L (grandes échelles)
- L'énergie passe d'échelles en échelles (les tourbillons donnent naissance à des tourbillons plus petits par étirements - replis)

Cascade de Richardson

- L'énergie est injectée à l'échelle L (grandes échelles)
- L'énergie passe d'échelles en échelles (les tourbillons donnent naissance à des tourbillons plus petits par étirements - replis)
- Elle est dissipée lorsque le "temps visqueux" est de l'ordre du "temps dynamique" (échelle de Kolmogorov).

Cascade de Richardson

- L'énergie est injectée à l'échelle L (grandes échelles)
- L'énergie passe d'échelles en échelles (les tourbillons donnent naissance à des tourbillons plus petits par étirements - replis)
- Elle est dissipée lorsque le "temps visqueux" est de l'ordre du "temps dynamique" (échelle de Kolmogorov).
- Hypothèse :

$$R_l \gg 1 \Rightarrow \epsilon_l = \epsilon = \mathrm{Cte}$$

Voir film à :

`http://serve.me.nus.edu.sg/limtt/#Video_Gallery`

Cascade de Richardson

- $\epsilon = 2\nu S_{ij} S_{ij} \sim \nu \, \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$

Cascade de Richardson

- $\epsilon = 2\nu S_{ij} S_{ij} \sim \nu \, \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$
- Injection = Dissipation :

$$\frac{u_L^3}{L} = \nu \, \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$$

Cascade de Richardson

- $\epsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij} \sim \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$
- Injection = Dissipation :

$$\frac{u_L^3}{L} = \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$$

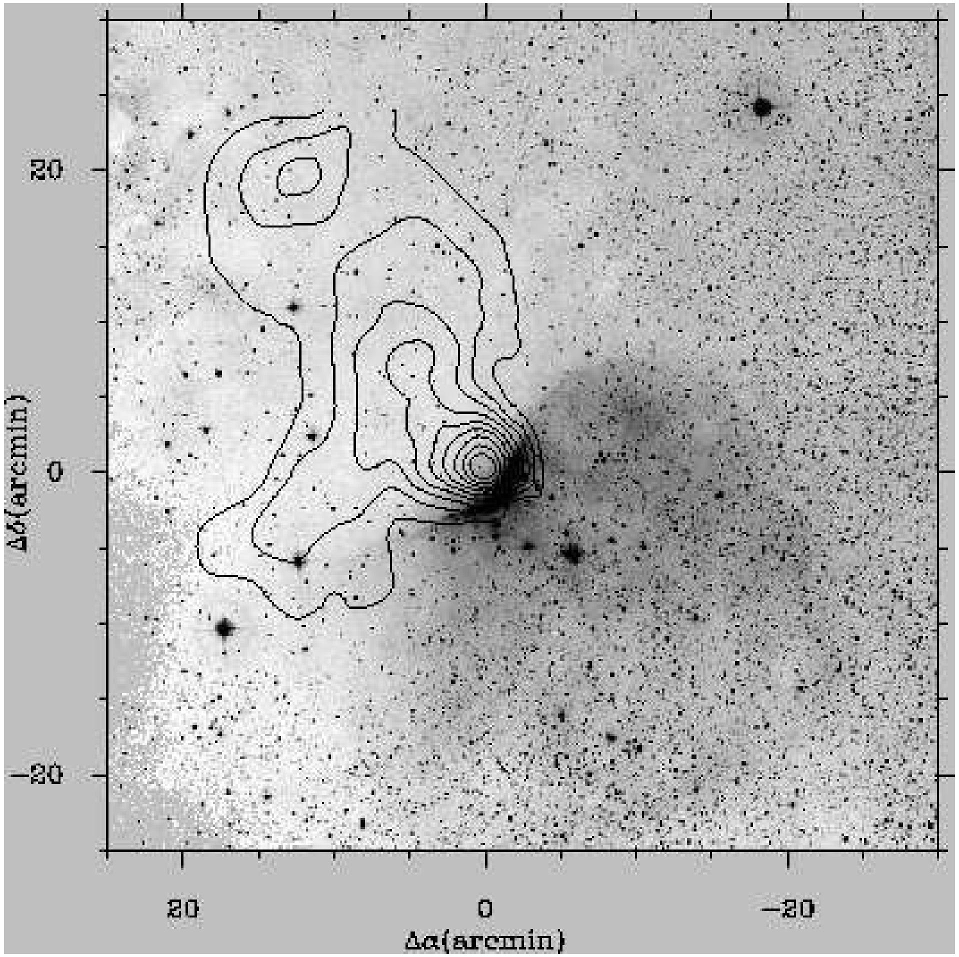
$$\eta = (R_L)^{-3/4}\ L$$

$$u_\eta = (R_L)^{-1/4}\ u_L$$

$$t_\eta = (R_L)^{-1/2}\ t_L$$

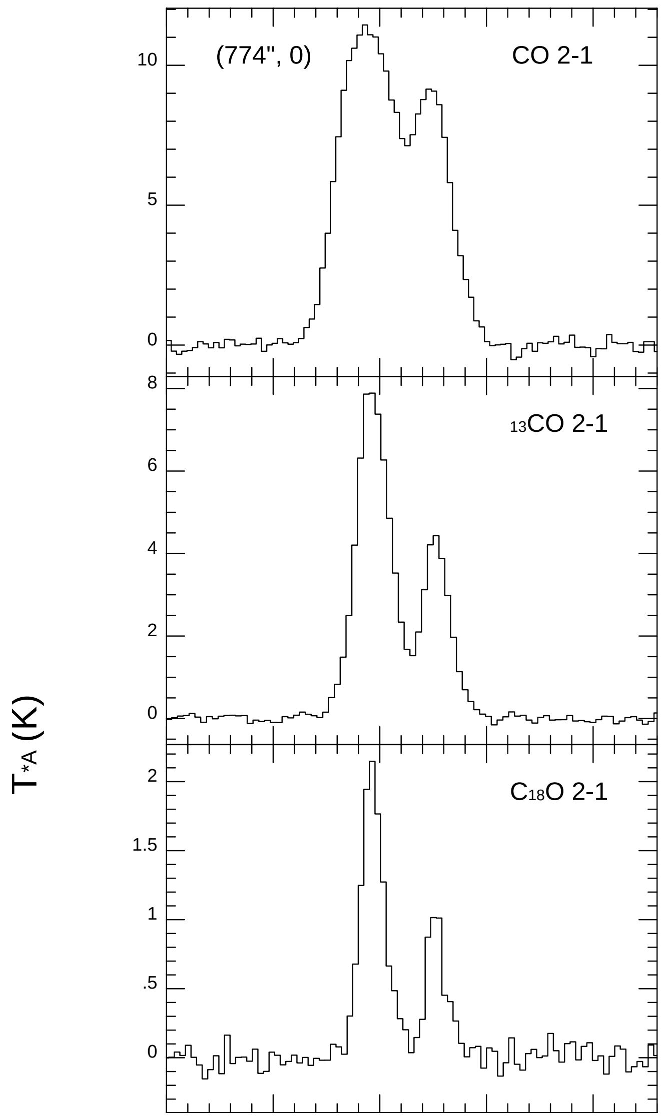
R_L	10^3	10^5	10^7	10^9
L/η	178	5620	178000	5620000
U_L/u_η	5.6	18	56	180
t_L/t_η	3.2	316	3160	31600

S140



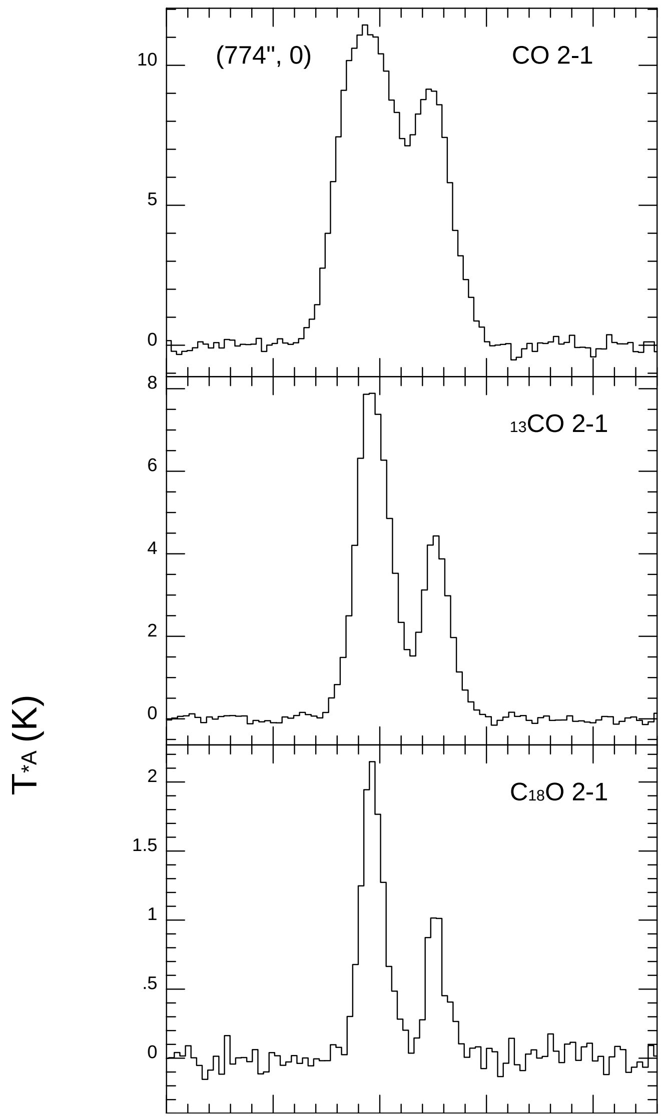
Distance : $940\,\mathrm{pc}$, Isocontours : $^{13}\mathrm{CO}\ J:\ 2 \rightarrow 1$

S140



^{12}CO : raie épaisse.
^{13}CO : raie épaisse.
$\Rightarrow v_L \sim 2.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
C^{18}O : coeur seulement.

S140



^{12}CO : raie épaisse.

^{13}CO : raie épaisse.

$\Rightarrow \; v_L \sim 2.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

C^{18}O : coeur seulement.

$$L \sim 1.2\,10^{19}\,\mathrm{cm}$$

$$v_L \sim 2.5\,10^{5}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$$

$$\nu \sim 3\,10^{15}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$$

$$Re \sim 10^{9}$$

Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L\ (Re)^{-3/4} \sim 7\,10^{-7}\,\mathrm{pc}$$

Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L \ (Re)^{-3/4} \sim 7\,10^{-7}\,\mathrm{pc}$$

Résolution :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L\ (Re)^{-3/4} \sim 7\,10^{-7}\,\mathrm{pc}$$

Résolution :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

Diamètre nécessaire :

$$D \sim \frac{\lambda}{\theta} \sim 2000\,\mathrm{km}$$

Le Modèle $k - \epsilon$

Mont St Hélène - 18 mai 1980

Énergie cinétique turbulente

On note :

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{u}^2}\right)$$

On peut écrire une équation d'évolution de k (si, si...)

Énergie cinétique turbulente

On note :

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{u}^2}\right)$$

On peut écrire une équation d'évolution de k (si, si...)
On l'utilise pour former une expression empirique de τ_{ij}^R :

$$\tau_{ij}^R = 2\rho\,\nu_t\,\bar{S}_{ij} - \frac{\rho}{3}\,\left(\overline{u_k u_k}\right)\,\delta_{ij}$$

$$\nu_t = l\,V_t$$

- ν_t : Viscosité turbulente
- $\frac{\rho}{3}\,\left(\overline{u_k u_k}\right)$: Pression turbulente

Viscosité Turbulente

- On choisi l de l'ordre de L
- On choisi V_t de l'ordre $k^{1/2}$

$$\nu_t \sim k^{1/2}\, L$$

Or :

$$\epsilon \sim \frac{V_t^3}{L} \Rightarrow L = \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$$

D'où :

$$\nu_t = c_\mu \, \frac{k^2}{\epsilon}$$

Avec : $c_\mu \simeq 0.09$ d'après les expériences.

Modèle empirique

- Évolution de la vitesse (Discussion : Davidson, p 176) :

$$\rho \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) V_i = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\tau_{ij}} + \tau_{ij}^R \right]$$

Modèle empirique

- Évolution de la vitesse (Discussion : Davidson, p 176) :

$$\rho\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)V_i = -\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\tau_{ij}} + \tau_{ij}^R\right]$$

- Évolution de k (advection diffusion) :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla k = \nabla\cdot(\nu_t\nabla k) + G - \epsilon\,; \quad G = \left(\frac{\tau_{ij}^R}{\rho}\right)\bar{S}_{ij}$$

Modèle empirique

- Évolution de la vitesse (Discussion : Davidson, p 176) :

$$\rho\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)V_i = -\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\tau_{ij}} + \tau_{ij}^R\right]$$

- Évolution de k (advection diffusion) :

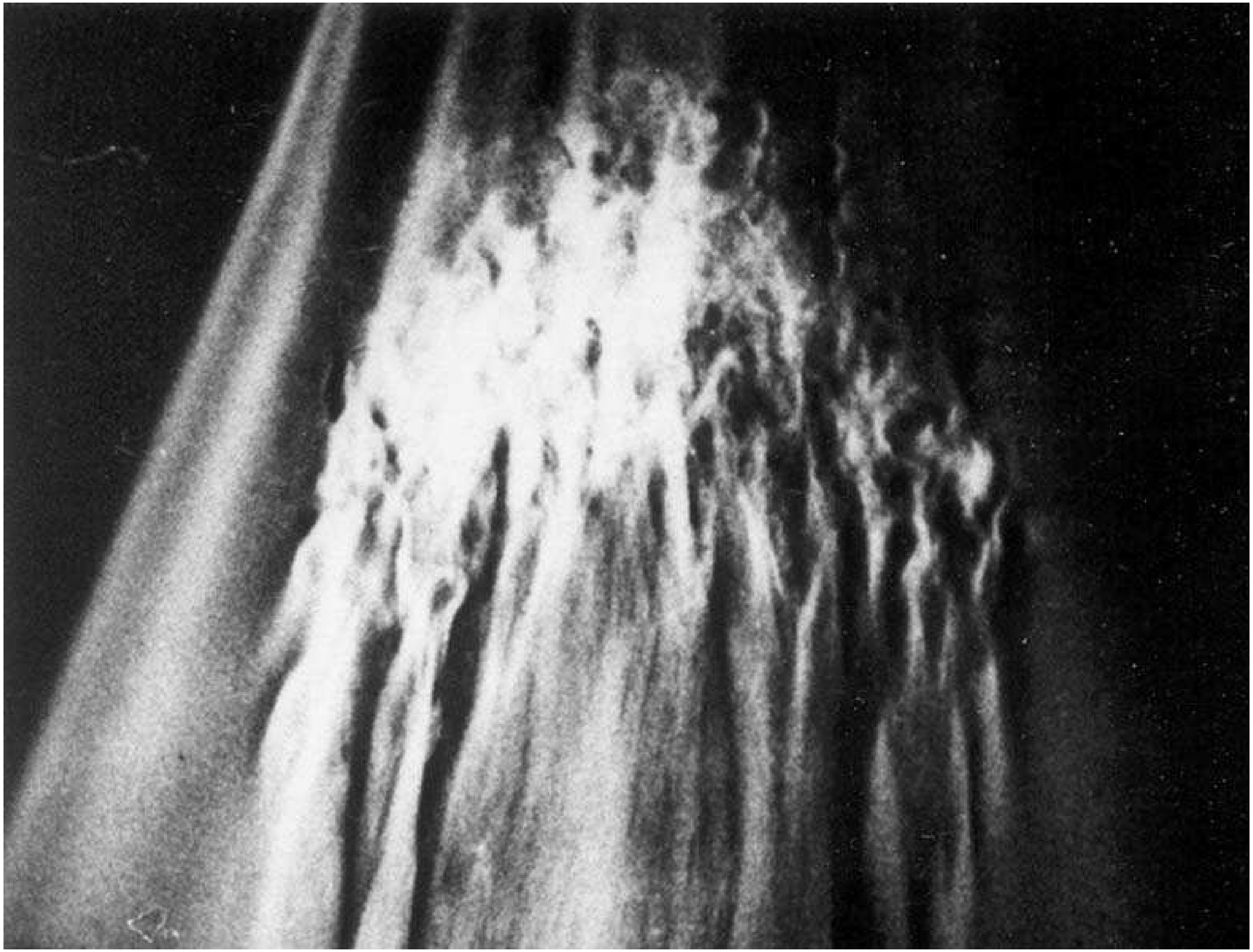
$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla k = \nabla\cdot(\nu_t\nabla k) + G - \epsilon\,; \quad G = \left(\frac{\tau_{ij}^R}{\rho}\right)\bar{S}_{ij}$$

- Évolution de la dissipation :

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla\epsilon = \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\nabla\epsilon\right) + c_1\frac{G\epsilon}{k} + c_2\frac{\epsilon^2}{k}$$

$$\sigma_\epsilon = 1.3; \quad c_1 = 1.44; \quad c_2 = 1.92$$

Fonctions de Structure



Cadre

On suppose :

Cadre

On suppose :

- Turbulence homogène (ne dépend pas de $\mathbf{x}$)

Cadre

On suppose :

- Turbulence homogène (ne dépend pas de $\mathbf{x}$)
- Turbulence Isotrope (invariant par rotation et réflection)

Cadre

On suppose :

- Turbulence homogène (ne dépend pas de $\mathbf{x}$)
- Turbulence Isotrope (invariant par rotation et réflection)
- Turbulence stationnaire (vitesse d'ensemble nulle)

Cadre

On suppose :

- Turbulence homogène (ne dépend pas de $\mathbf{x}$)
- Turbulence Isotrope (invariant par rotation et réflection)
- Turbulence stationnaire (vitesse d'ensemble nulle)

On défini :

$$u^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle$$

Cadre

On suppose :

- Turbulence homogène (ne dépend pas de $\mathbf{x}$)
- Turbulence Isotrope (invariant par rotation et réflection)
- Turbulence stationnaire (vitesse d'ensemble nulle)

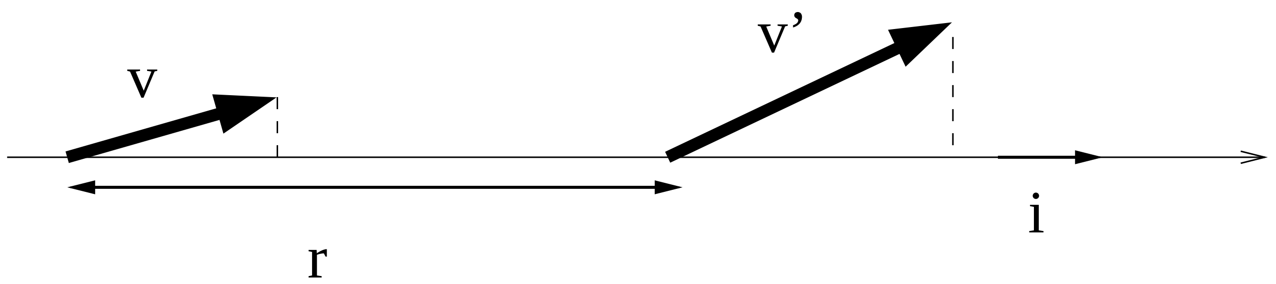
On défini :

$$u^2 =< u_x^2 >=< u_y^2 >=< u_z^2 >$$

Donc :

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle = \langle u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \rangle = 3\, u^2$$

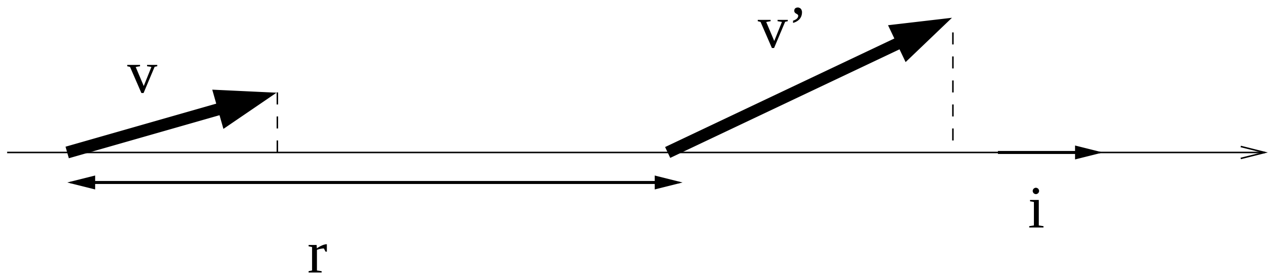
Fonctions de corrélation et de structure



Fonction de corrélation des vitesses :

$$Q_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x})\, u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Fonctions de corrélation et de structure



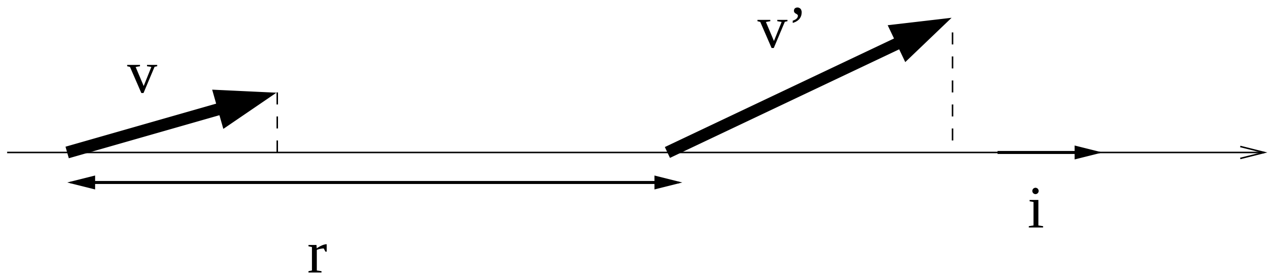
Fonction de corrélation des vitesses :

$$Q_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x})\, u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Incrément longitudinal de vitesse :

$$\Delta v(r) = u_x(\mathbf{x} + r\,\vec{i}\,) - u_x(\mathbf{x})$$

Fonctions de corrélation et de structure



Fonction de corrélation des vitesses :

$$Q_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x})\, u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$$

Incrément longitudinal de vitesse :

$$\Delta v(r) = u_x(\mathbf{x} + r\,\vec{i}\,) - u_x(\mathbf{x})$$

Fonction de structure d'ordre p.

$$\langle[\Delta v]^p\rangle = \langle[u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e_x}) - u_x(\mathbf{x})]^p\rangle$$

Fonctions de corrélation des vitesses

- $Q_{ij}(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$: Les vitesses sont découplées

Fonctions de corrélation des vitesses

- $Q_{ij}(\mathbf{r}) \to 0$ si $r \to \infty$: Les vitesses sont découplées
- $Q_{xx}(r\mathbf{e}_x) \to u^2$ si $r \to 0$.
  $\frac{1}{2}Q_{ii}(0) = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle$: densité d'énergie cinétique

Fonctions de corrélation des vitesses

- $Q_{ij}(\mathbf{r}) \to 0$ si $r \to \infty$: Les vitesses sont découplées
- $Q_{xx}(r\mathbf{e}_x) \to u^2$ si $r \to 0$.
  $\frac{1}{2}Q_{ii}(0) = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle$: densité d'énergie cinétique
- $Q_{ij}(0) = -\frac{1}{\rho}\,\tau_{ij}^R$ (τ_{ij}^R : contraintes de Reynolds)

Fonctions de corrélation des vitesses

- $Q_{ij}(\mathbf{r}) \to 0$ si $r \to \infty$: Les vitesses sont découplées
- $Q_{xx}(r\mathbf{e}_x) \to u^2$ si $r \to 0$.
  $\frac{1}{2}Q_{ii}(0) = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle$: densité d'énergie cinétique
- $Q_{ij}(0) = -\frac{1}{\rho}\,\tau_{ij}^R$ (τ_{ij}^R : contraintes de Reynolds)

On peut écrire :

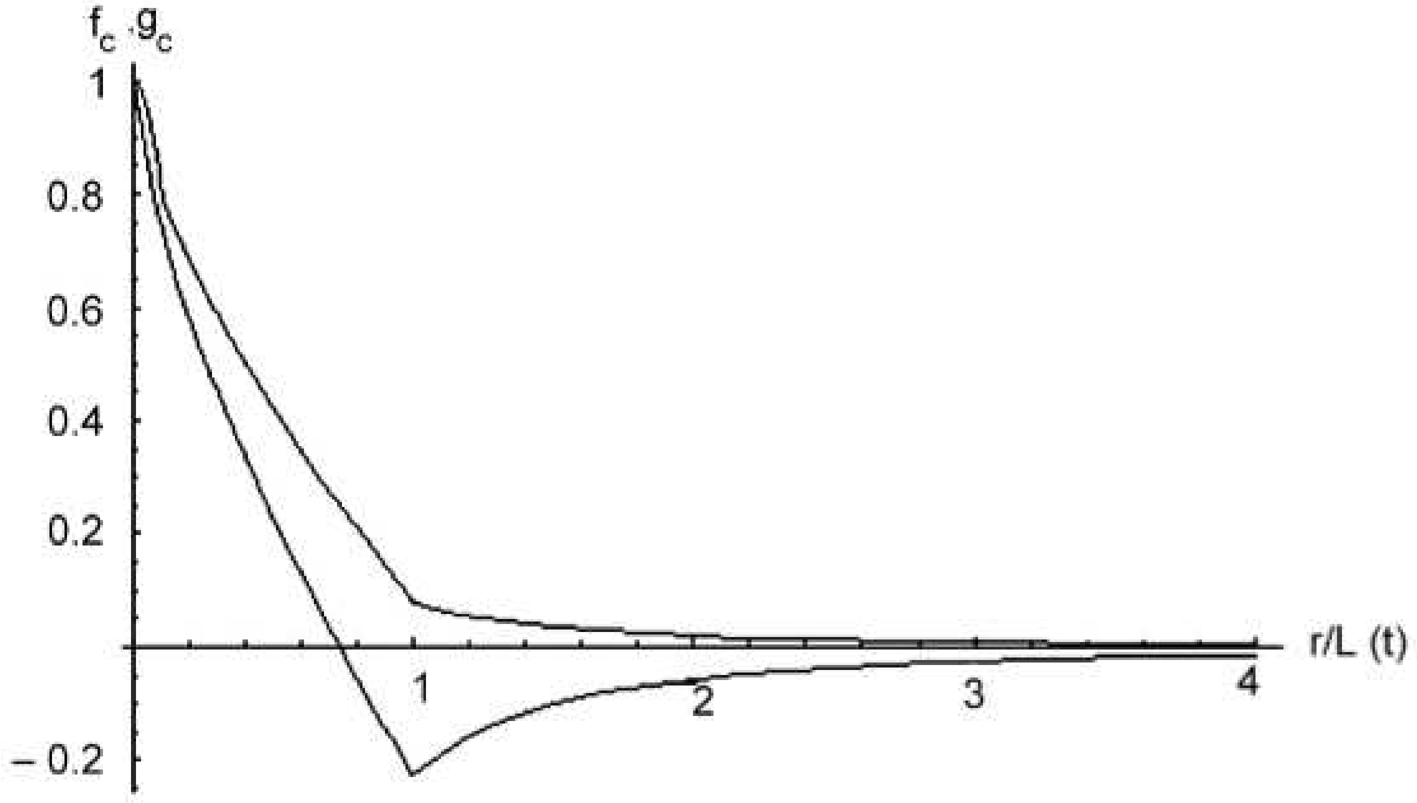
$$Q_{xx}(r\mathbf{e}_x) = u^2\, f(r)$$

$$Q_{yy}(r\mathbf{e}_x) = u^2\, g(r)$$

$$L = \int_0^\infty f(r)\, dr$$

- L : Échelle intégrale de la turbulence.

Fonctions de corrélation des vitesses



Hosokawa, 2007

Fonctions de corrélation des vitesses

On peut montrer que :

$$g(r) = \frac{1}{2r}\left(r^2 f(r)\right)' = f(r) + \frac{1}{2} r\, f'(r)$$

Fonctions de corrélation des vitesses

On peut montrer que :

$$g(r) = \frac{1}{2r} \left(r^2 f(r)\right)' = f(r) + \frac{1}{2} r\, f'(r)$$

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + \ldots ; \qquad \frac{\lambda}{L} = \sqrt{15}\, (R_L)^{-1/2}$$

Fonctions de corrélation des vitesses

On peut montrer que :

$$g(r) = \frac{1}{2r}\left(r^2 f(r)\right)' = f(r) + \frac{1}{2} r\, f'(r)$$

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + \ldots ; \qquad \frac{\lambda}{L} = \sqrt{15}\,(R_L)^{-1/2}$$

λ : Échelle de Taylor microscopique. Autre définition :

$$\lambda^2 = 2\,\frac{\langle u^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\rangle}$$

$$R_\lambda = \frac{\lambda\, u}{\nu} \simeq 4\,(R_L)^{1/2}$$

(Attention : u, pas u_λ)

Fonction de structure d'ordre 2

Définition :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = \left\langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e_x}) - u_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle$$

Fonction de structure d'ordre 2

Définition :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = \left\langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e_x}) - u_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle$$

On montre que :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = 2u^2 \, (1 - f(r))$$

Fonction de structure d'ordre 2

Définition :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = \left\langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e_x}) - u_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle$$

On montre que :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = 2u^2 \, (1 - f(r))$$

Donc :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle \rightarrow \frac{4}{3} \left\langle \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \right\rangle$$

Fonction de structure d'ordre 2

Définition :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = \left\langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e_x}) - u_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle$$

On montre que :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = 2u^2 \ (1 - f(r))$$

Donc :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle \rightarrow \frac{4}{3} \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right\rangle$$

Interprétation :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \frac{4}{3} \left[Energy(< r)\right]$$

Fonction de structure d'ordre 2

Définition :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = \left\langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e_x}) - u_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle$$

On montre que :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle = 2u^2 \ (1 - f(r))$$

Donc :

$$\left\langle [\Delta v]^2 \right\rangle \to \frac{4}{3} \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right\rangle$$

Interprétation :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \frac{4}{3} \left[Energy(< r) \right] \left(+ r^2 \left[Enstrophy(> r) \right] \right)$$

Loi des 2/3

- Première “hypothèse de similarité” :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle \text{ ne dépend que de } \epsilon,\ \nu \text{ et } r.$$

Loi des 2/3

- Première “hypothèse de similarité” :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle \text{ ne dépend que de } \epsilon,\ \nu \text{ et } r.$$

Donc :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \hat{F}(\epsilon, \nu, r) = u_\eta^2\, F\left(\frac{r}{\eta}\right)$$

avec $u_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}$ et $\eta = \left(\nu^3/\epsilon\right)^{1/4}$
Rappel : $\nu = u_\eta\, \eta$ et $u_\eta^3 = \eta\, \epsilon$

Loi des 2/3

- "deuxième hypothèse de similarité" :

Si en plus $\eta \ll r \ll L$, $\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle$ ne peut dépendre que de ϵ et r. Soit :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \beta \, \epsilon^{2/3} \, r^{2/3}$$

$\beta \simeq 2$: Constante de Kolmogorov.

Loi des 2/3

- "deuxième hypothèse de similarité" :

Si en plus $\eta \ll r \ll L$, $\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle$ ne peut dépendre que de ϵ et r. Soit :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \beta\, \epsilon^{2/3}\, r^{2/3}$$

$\beta \simeq 2$: Constante de Kolmogorov.

- Plus généralement :

$$\langle [\Delta v(r)]^p \rangle = \beta_p\, (\epsilon r)^{p/3}$$

Loi des 2/3

- “deuxième hypothèse de similarité” :

Si en plus $\eta \ll r \ll L$, $\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle$ ne peut dépendre que de ϵ et r. Soit :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \beta\, \epsilon^{2/3}\, r^{2/3}$$

$\beta \simeq 2$: Constante de Kolmogorov.

- Plus généralement :

$$\langle [\Delta v(r)]^p \rangle = \beta_p\ (\epsilon r)^{p/3}$$

- Un résultat exact !

$$\left\langle [\Delta v(r)]^3 \right\rangle = -\frac{4}{5}\, \epsilon r$$

Fourier

Soit $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ la transformée de Fourier (3D) de $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Alors, le spectre d'énergie est défini par ($k = |\mathbf{k}|$) :

$$E(k)\,\delta\left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right) = 2\pi\, k^2 \left\langle \hat{\mathbf{u}}^\dagger(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}') \right\rangle$$

Et :

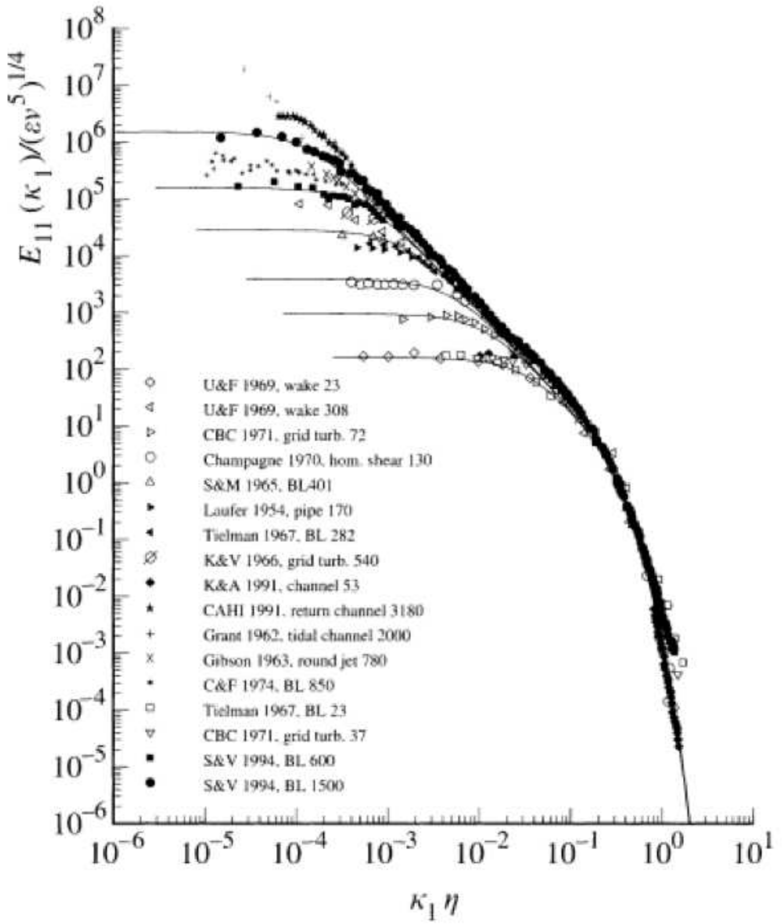
$$\frac{1}{2}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle = \int_0^\infty E(k)\,dk$$

$$\frac{1}{2}\left\langle \omega^2 \right\rangle = \int_0^\infty k^2\,E(k)\,dk$$

Donc :

$$\left\langle [\Delta v(r)]^2 \right\rangle = \beta\,\epsilon^{2/3}\,r^{2/3} \iff E(k) = \alpha\,\epsilon^{2/3}\,k^{-5/3}$$

Cascade en “-5/3”



Pope, “Turbulent flows”, p 235

Moments d'une distribution

- Définition :

$$f(u_0)\,du = Prob(u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + du)$$

- Normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1$$

- Moyenne de $g(u)$:

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,f(u)\,du$$

Moments d'une distribution

- Moments :

$$\langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^n \, f(u) \, du$$

n	Nom	English	Symbole
1	Moyenne	Mean	$<>$
2	Variance	Variance	σ^2
3	Asymétrie	Skewness	S
4	Aplatissement	Kurtosis	K

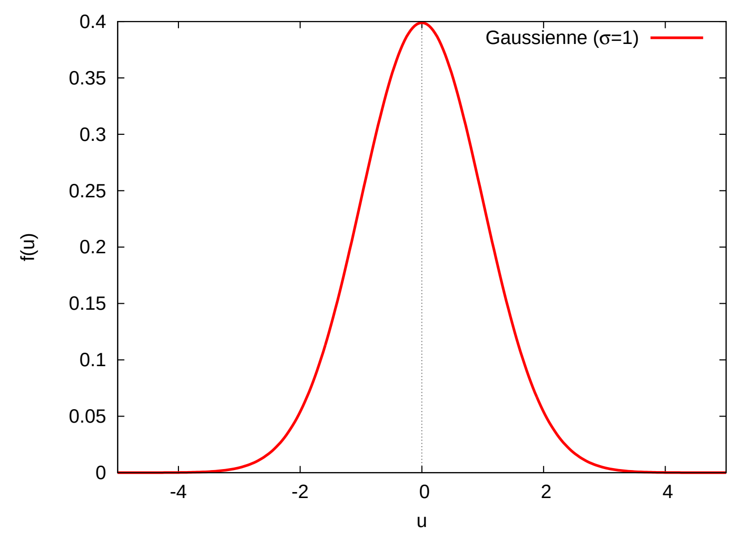
- $S = \dfrac{\langle u^3 \rangle}{\langle u^2 \rangle^{3/2}}$
- $K = \dfrac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2}$, parfois : $K = \dfrac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} - 3$

Gaussienne centrée

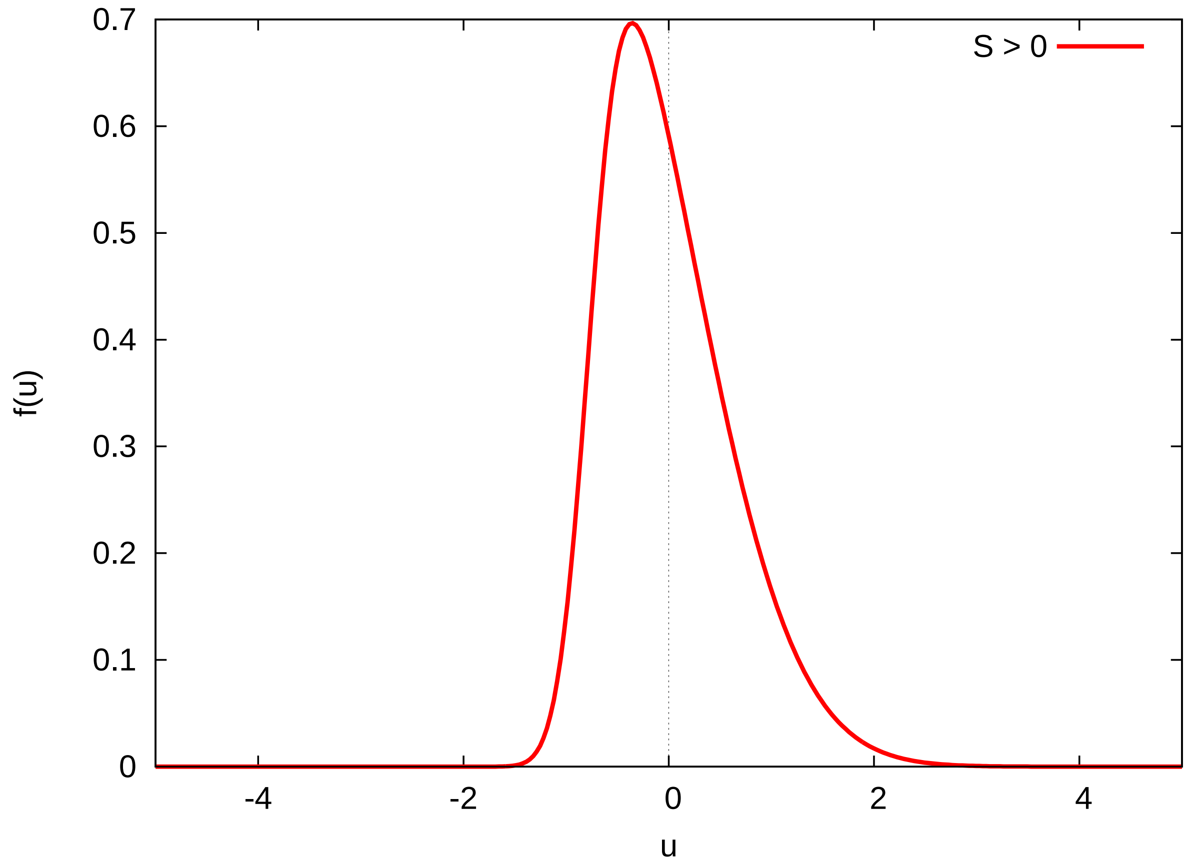
$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}}\,\exp\left(-\frac{u^2}{2\,\sigma^2}\right)$$

Moments :

- $\langle u^2 \rangle = \sigma^2$
- $S = 0$
- $K = 3$

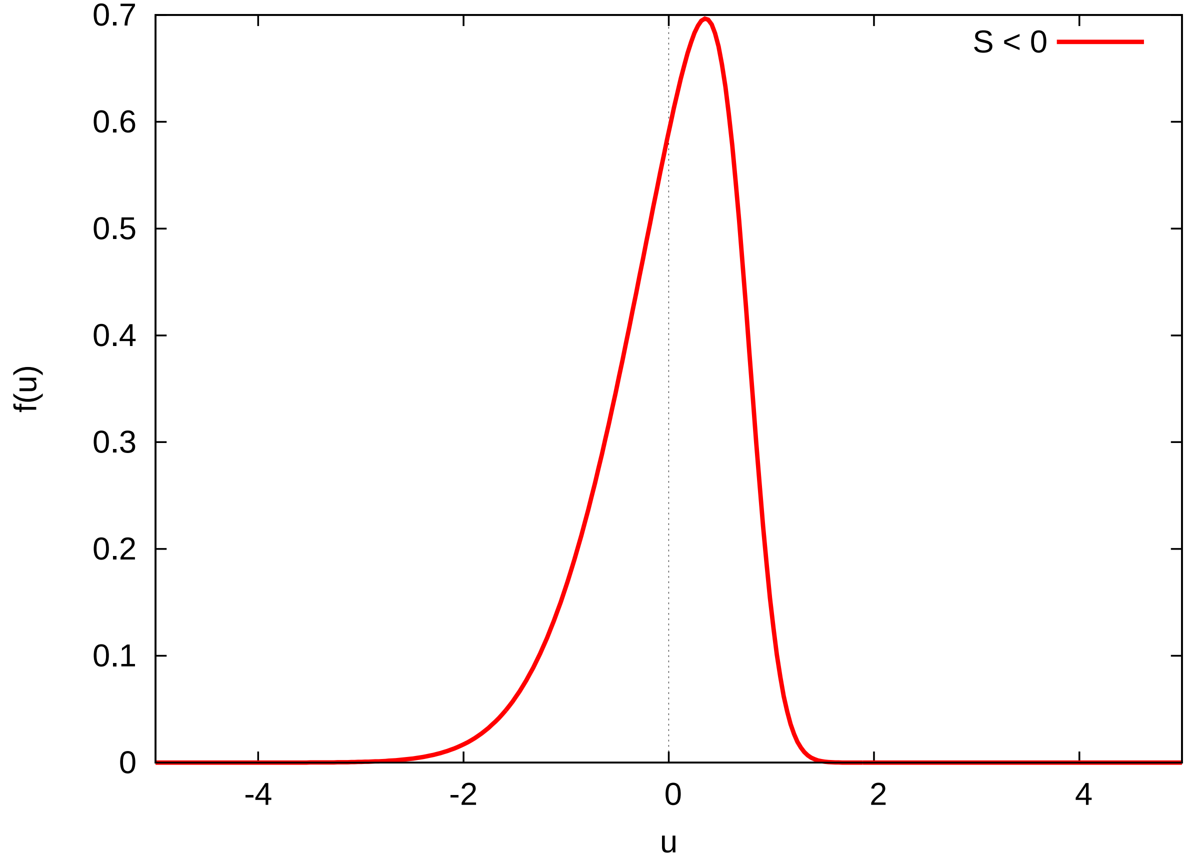


Distribution non-Gaussienne



$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

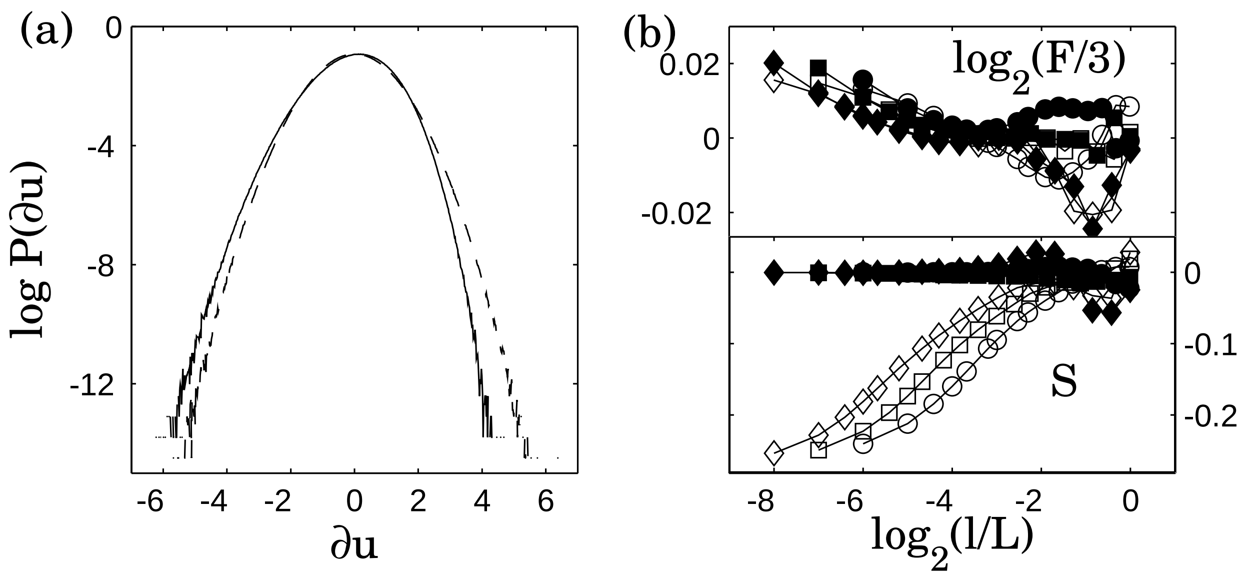
Distribution non-Gaussienne



$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Fonction de distribution

- $\vec{u}$ a une distribution Gaussienne.
- $\Delta\vec{u}$ n'a **pas** une distribution Gaussienne !
  - ✦ Moment d'ordre 3 ("skewness") $S \simeq -0.3 - 0.5$
  - ✦ Moment d'ordre 4 ("Kurtosis") $K \to \infty$ si $Re \to \infty$



Chevillard et al., EPL, 2010, 89, 54002

Mécanisme

- Le “moteur” de la cascade est l'étirement des tourbillons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\omega^2}{2} \right\rangle = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle - \nu \left\langle (\nabla \wedge \omega)^2 \right\rangle$$

Avec (à peu près...) d'après Davidson, p286 :

$$= \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle \simeq -\frac{7}{6\sqrt{15}} S_0 \left\langle \omega^2 \right\rangle^{3/2}$$

- $S_0 < 0 \Rightarrow$ L'enstrophie croît !
- Fin de la cascade quand la dissipation compense l'étirement.

Intermittence

- Fonctions de structure d'ordre p :

$$< [\Delta v(r)]^p > \propto r^{\xi_p}$$

- Kolmogorov (généralisation des lois de similarité) :

$$\xi_p = \frac{p}{3}$$

- Signature de l'intermittence :
  - ✦ On constate que $\xi_p < \frac{p}{3}$ pour $p > 3$.