

Turbulence

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

12 Décembre 2012

Résolution numérique

Résolution numérique

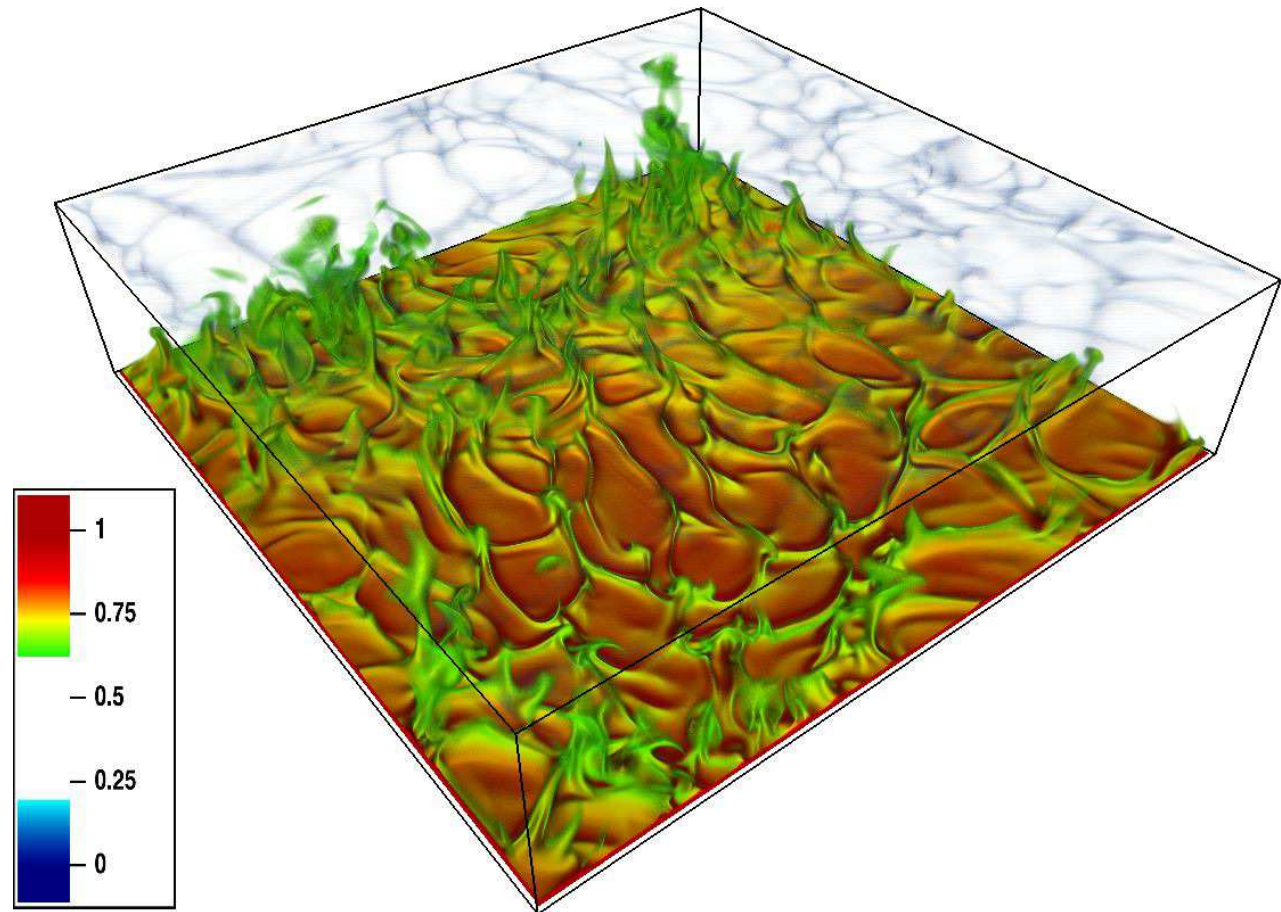
❖ Méthodes

Direct Numerical Simulation

SPH

Large Eddy Simulation

PDF



Garaud et al. (2010)

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.
- Éléments finis :
 - ◆ Formulation variationnelle.

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.
- Éléments finis :
 - ◆ Formulation variationnelle.
- Volumes finis :
 - ◆ Equations de conservation.

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.
- Éléments finis :
 - ◆ Formulation variationnelle.
- Volumes finis :
 - ◆ Equations de conservation.
- Méthodes spectrales :
 - ◆ Développement sur une base.

Direct Numerical Simulation

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

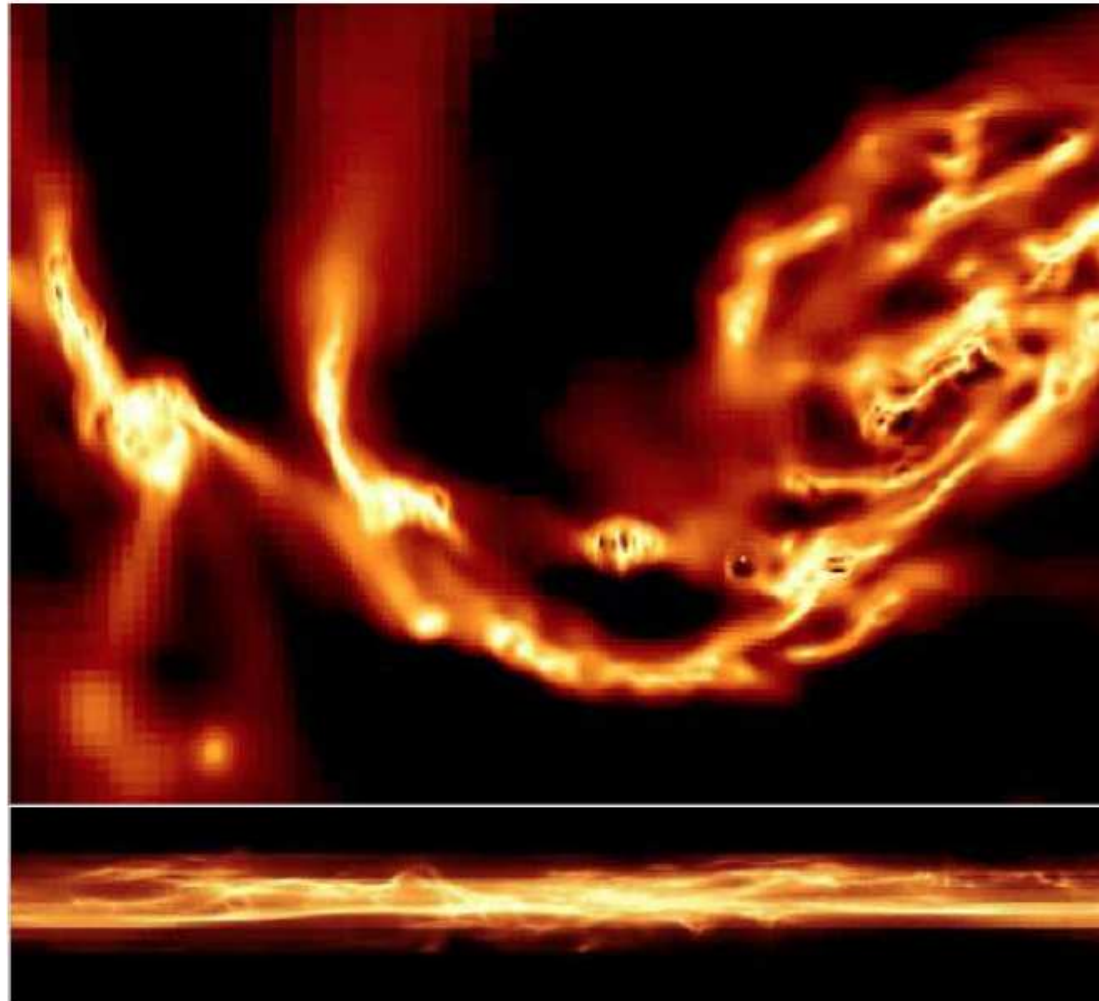
❖ Coût

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF



Bournaud et al. (2010)

Coût

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

❖ **Coût**

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- “DNS” (Direct Numerical Simulation)

$$n \sim \frac{L_{box}}{L} \frac{L}{\eta} = \frac{L_{box}}{L} (R_L)^{3/4}$$

$$N_x = n^3 \propto \left(\frac{L_{box}}{L} \right)^3 (R_L)^{9/4}$$

Coût

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

❖ **Coût**

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- “DNS” (Direct Numerical Simulation)

$$n \sim \frac{L_{box}}{L} \frac{L}{\eta} = \frac{L_{box}}{L} (R_L)^{3/4}$$

$$N_x = n^3 \propto \left(\frac{L_{box}}{L} \right)^3 (R_L)^{9/4}$$

- Donc, avec $\frac{L_{box}}{L} \simeq 3$:
 - ◆ $R_L \sim 10^4$ nécessite 10^{10} points !
 - ◆ 1024 points représente $R_\lambda \sim 10^2$ seulement.

Coût

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

❖ **Coût**

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- Pas de temps maxi : $\Delta t \sim \frac{\eta}{u} \sim \frac{L}{u} R_L^{-3/4}$:

$$N_t \sim \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{T}{L/u} R_L^{3/4}$$

Coût

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

❖ Coût

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- Pas de temps maxi : $\Delta t \sim \frac{\eta}{u} \sim \frac{L}{u} R_L^{-3/4}$:

$$N_t \sim \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{T}{L/u} R_L^{3/4}$$

- Temps de calcul :

$$t_{CPU} \propto N_x N_t \sim \left(\frac{T}{L/u} \right) \left(\frac{L_{box}}{L} \right)^3 R_L^3$$

Coût

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

❖ Coût

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

Table 7.1 Estimated computer run times for (i) a gigaflop computer and (ii) a teraflop computer, based on equation (7.4)

| <i>Gigaflop computer</i> | | $Re = 100$ | $Re = 500$ | $Re = 1000$ | $Re = 5000$ |
|--------------------------|--|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $L_{BOX}(l)$ | | $R_\lambda = 39$ | $R_\lambda = 87$ | $R_\lambda = 122$ | $R_\lambda = 274$ |
| 10 | | 2 h | 9 days | 2 months | 24 years |
| 20 | | 1 day | 2 months | 2 years | 2 centuries |
| 50 | | 9 days | 3 years | 24 years | A long time |
| 100 | | 2 months | 24 years | 2 centuries | A very long time |
| <i>Teraflop computer</i> | | $Re = 1000$ | $Re = 5000$ | $Re = 10,000$ | $Re = 50,000$ |
| $L_{BOX}(l)$ | | $R_\lambda = 122$ | $R_\lambda = 274$ | $R_\lambda = 386$ | $R_\lambda = 866$ |
| 10 | | 2 h | 9 days | 2 months | 24 years |
| 20 | | 1 day | 2 months | 2 years | 2 centuries |
| 50 | | 9 days | 3 years | 24 years | A long time |
| 100 | | 2 months | 24 years | 2 centuries | A very long time |

Tianhe-1A : 2.57 Peta-flops

Adaptive Mesh Refinement

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

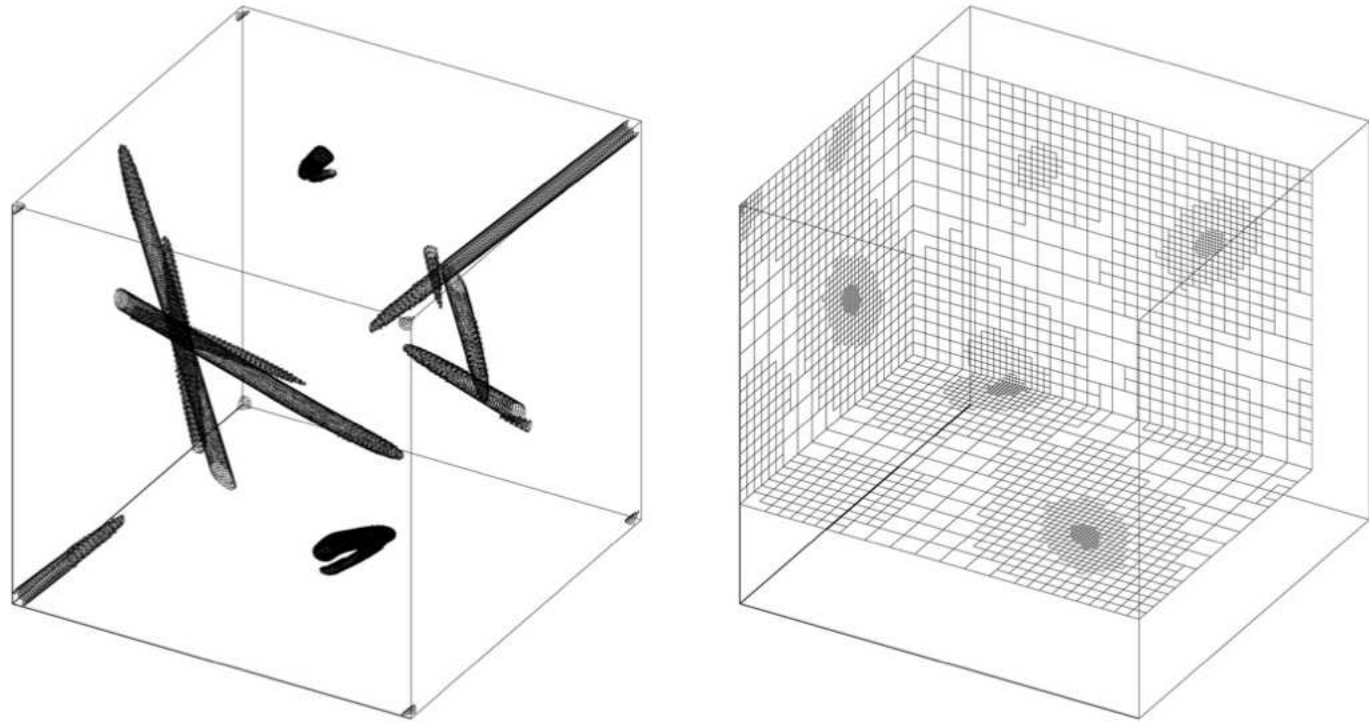
❖ Coût

❖ AMR

SPH

Large Eddy
Simulation

PDF



Tessier (2007)

Adaptive Mesh Refinement

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

❖ DNS

❖ Coût

❖ AMR

SPH

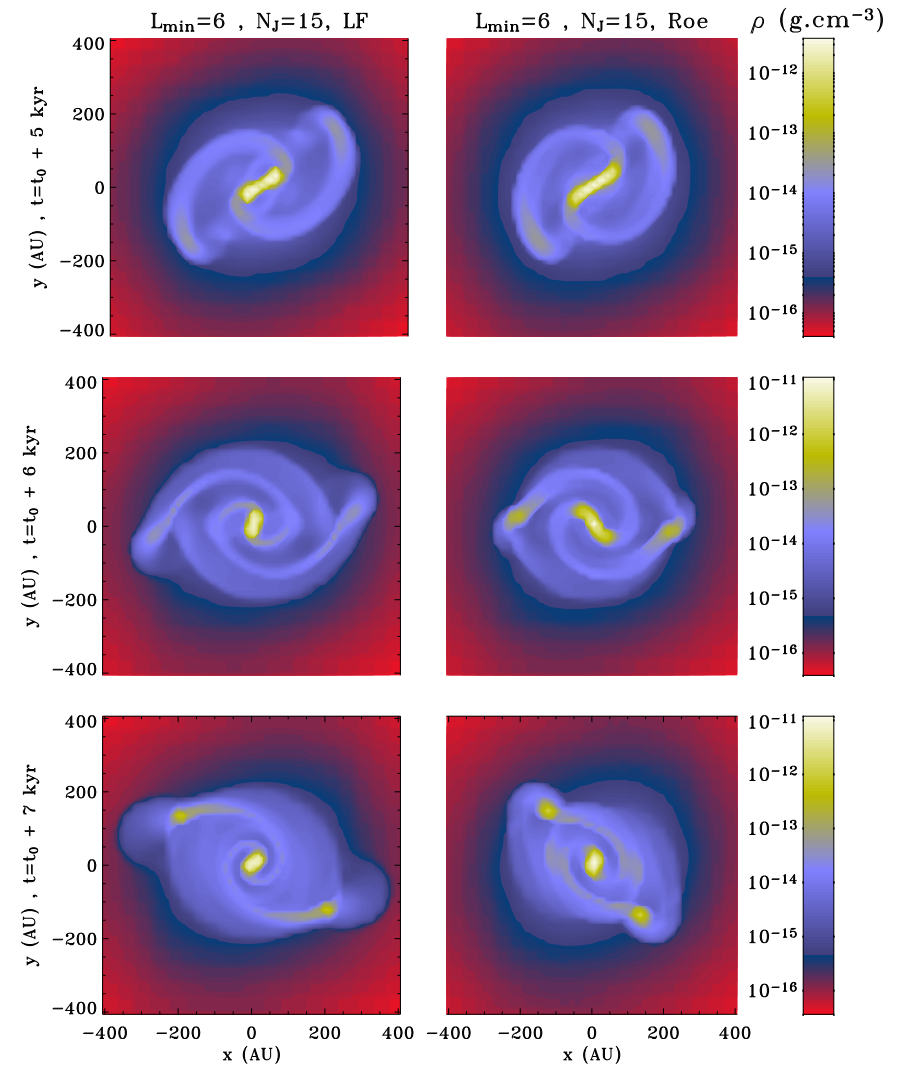
Large Eddy
Simulation

PDF

Un exemple :

- RAMSES (AMR) vs.
- DRAGON (SPH)

Commerçon et al., A&A
(2008)



SPH

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

❖ SPH

Large Eddy
Simulation

PDF

- “Smooth Particles Hydrodynamics”
- Méthode Lagrangienne (résolution adaptative)
- Propriétés moyennées par un “Kernel” (noyau) de taille h .
- Bien adapté pour “capturer” les chocs (écoulements supersoniques)
- Facile d’ajouter la gravité.

Comparaison AMR vs. SPH : Kitsionas et al. (2009) :

| AMR | SPH |
|------------------------|-----------------------|
| ENZO, FLASH, TVD, ZEUS | GADGET, PHANTOM, VINE |

Filtrage

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Étant donné une échelle l , et un filtre $G_l(x)$:

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - r) G_l(r) dr$$

Filtrage

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Étant donné une échelle l , et un filtre $G_l(x)$:

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-r) G_l(r) dr$$

- Box filter : $G_l(x) = 1/l$ si $|x| < l/2$ et 0 sinon
- Gaussian filter : $G_l(x) = \exp(-x^2/l^2) / (l\sqrt{\pi})$
- Sharp spectral filter : $G_l(x) = \sin(\pi x/l) / (\pi x)$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} ; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} ; \quad \bar{\bar{u}} \neq \bar{u}$$

Navier-Stokes

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Une composante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i$$

Navier-Stokes

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ **NS**

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Une composante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i$$

On filtre :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i$$

Navier-Stokes

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ **NS**

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Une composante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i$$

On filtre :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i$$

On pose (contraintes résiduelles) :

$$\tau_{ij}^R = \rho [\bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}]$$

Navier-Stokes

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Une composante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i$$

On filtre :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i$$

On pose (contraintes résiduelles) :

$$\tau_{ij}^R = \rho [\bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}]$$

On obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_j} + \nu \Delta \bar{u}_i$$

Contraintes résiduelles

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Un modèle courant (“eddy-viscosity”) :

$$\tau_{ij}^R = 2\rho \nu_R \overline{S_{ij}} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^R$$

Contraintes résiduelles

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF

Un modèle courant (“eddy-viscosity”) :

$$\tau_{ij}^R = 2\rho \nu_R \overline{S_{ij}} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^R$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \nu_R) \overline{S_{ij}}]$$

\bar{P}^* : Pression “modifiée” (incorporant la pression turbulente aux petites échelles.

Un choix de ν_R (sur des arguments dimensionnels) :

$$\nu_R = C_S^2 l^2 (2\overline{S_{ij} S_{ij}})^{1/2}$$

avec $C_S \sim 0.1$: Coefficient de Smagorinsky.

Exemple : SN explosion

Résolution
numérique

Direct Numerical
Simulation

SPH

Large Eddy
Simulation

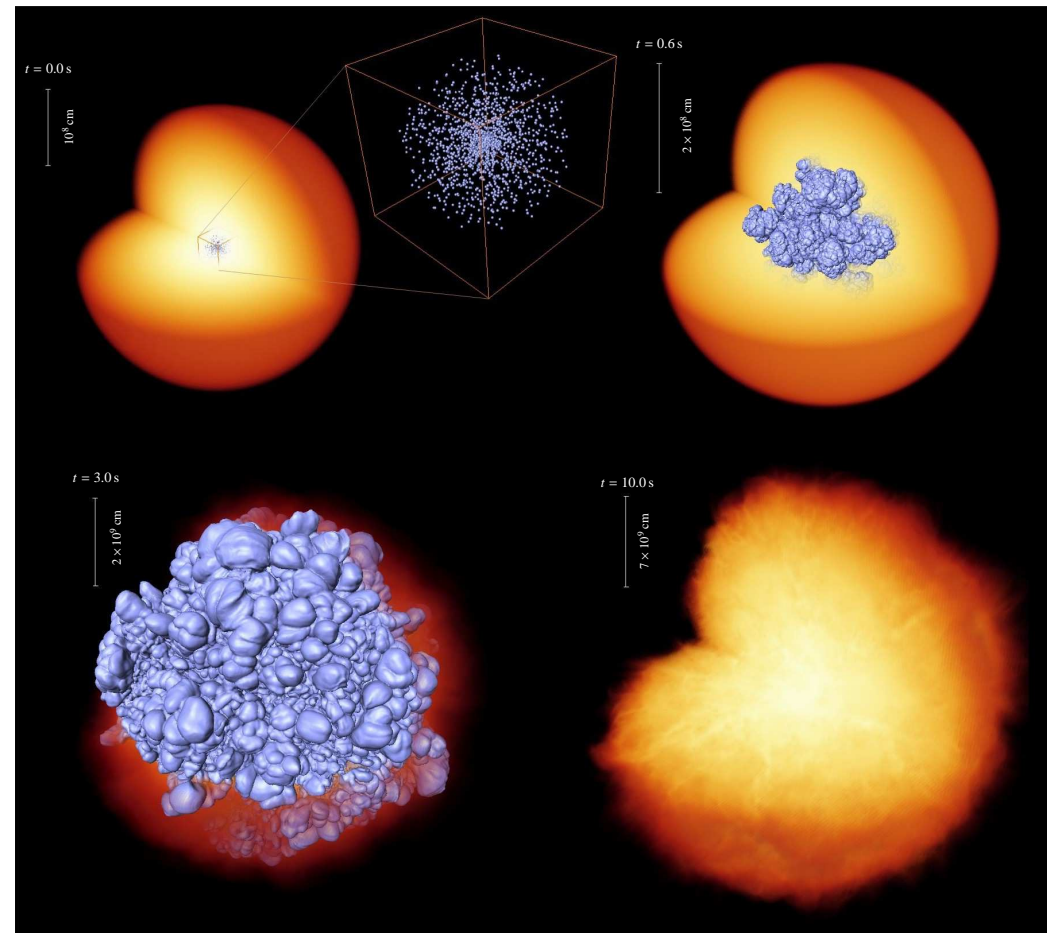
❖ Filtrage

❖ NS

❖ τ_{ij}^R

❖ SN explosion

PDF



Röpke et al. (2007)

- Equation pour la PDF des vitesses (f).
- Equation Différentielle Stochastique (Equation de Langevin) pour les *fluctuations* de vitesse.

$$dU(t) = -U(t) \frac{dt}{T_L} + \left(\frac{2\sigma^2}{T_L} \right)^{1/2} dW(t)$$

- f solution de l'équation de Fokker-Planck associée.

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} = \frac{1}{T_L} \frac{\partial}{\partial V} (V f_L) + \frac{\sigma^2}{T_L} \frac{\partial^2 f_L}{\partial V^2}$$

Avantages :

- Grande souplesse.
- Nombreuses extensions possibles.
- Possibilité d'incorporer simplement des flots réactifs.