Examen du 29 Octobre 2014

"In examinations the foolish ask questions that the wise cannot answer".
Oscar Wilde

Durée 2 heures. Tous les documents distribués en cours sont autorisés.

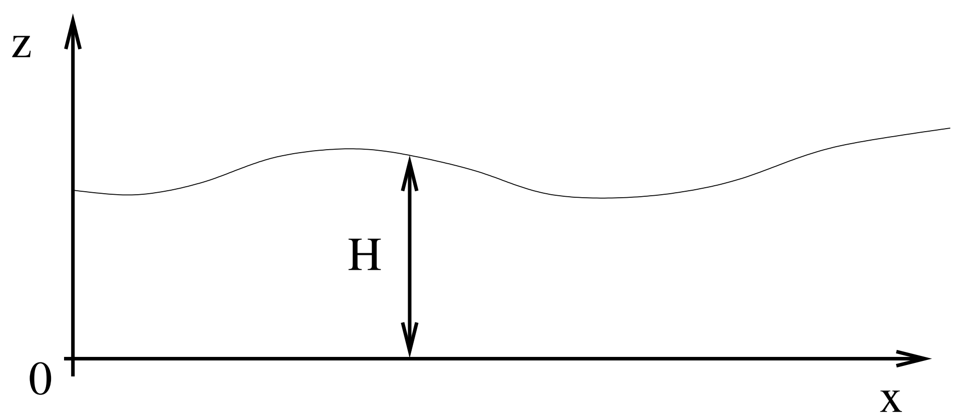
Ce problème établi les équations de Saint-Venant, utilisées en cours pour l'exercice II, et propose deux applications. Les trois parties sont largement indépendantes.

Première partie

Problème

1 Equations de Saint-Venant

On considère un écoulement dans un canal de largeur constante L d'un fluide incompressible (de l'eau). On négligera partout la viscosité. Le canal est horizontal, et la hauteur de l'eau est mesurée à partir du fond. On considère une "pression effective", qui inclut les éventuel effets de turbulence et on suppose qu'une approximation hydrostatique est raisonnable.



1. Donner l'expression de $P(x,z,t)$ en fonction de la hauteur de fluide $H(x,t)$.
2. On suppose l'écoulement à deux dimensions. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ s'écrit donc en fonction de ses composantes (u,w) :

$$\overrightarrow{V}(x,z,t) = u(x,z,t)\,\overrightarrow{e}_x + w(x,z,t)\,\overrightarrow{e}_z$$

Ecrire les équations de conservation de la masse d'une part et de Navier-Stokes pour chacune des composantes (u,w).

3. On écrit l'équation de la surface libre sous la forme :

$$F(x, z, t) = z - H(x, t) = 0$$

En écrivant que cette surface est advectée librement (c'est-à-dire que sa dérivée Lagrangienne est nulle), trouver l'équation d'évolution de $H(x, t)$.

4. Ecrire l'autre condition aux limites sur u à la surface, et les conditions sur u et w au fond (en $z = 0$), traduisant l'absence de cisaillement horizontal d'une part, et le maintien du contact avec le sol de l'autre.

5. On défini la vitesse moyenne sur la hauteur du fluide par :

$$U(x, t) = \frac{1}{H(x, t)} \int_0^{H(x,t)} u(x, z, t)\, dz$$

(a) Intégrer l'équation de conservation de la masse sur la hauteur.
Note : On rappelle la relation de Leibniz pour la dérivée d'une intégrale à bornes variables :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z)\, dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dz + \frac{db}{dx} f\left(x, b(x)\right) - \frac{da}{dx} f\left(x, a(x)\right)$$

Rappel. On doit trouver :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} = -H \frac{\partial U}{\partial x}$$

(b) Intégrer de même la composante u de l'équation de Navier-Stokes. On pourra utiliser l'approximation

$$\int_0^{H(x,t)} u^2\, dz \simeq U^2\, H$$

Rappel. On doit trouver :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x}$$

2 Perturbation d'un état au repos

A $t = 0$, on suppose que le système est dans un état stationnaire (U_0, H_0), constant pour tout x. On pose $U = U_0 + u$ et $H = H_0 + h$. u et h sont du même ordre.

1. Déduire des deux équations de la partie 1.5.a et 1.5.b les équations linéarisées de u et h.

2. On cherche une solution sous la forme :

$$h = h_m \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right)$$

$$u = u_m \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right)$$

où les amplitudes u_m et h_m sont constantes. Déduire des équations linéarisées une relation de dispersion entre ω et k. On pourra poser :

$$c_0 = \sqrt{H_0\, g}$$

3. Donner le sens de propagation des ondes de surface en fonction du signe de ω. Discuter de la propagation de ces ondes en fonction du nombre de Froude

$$Fr = \frac{U_0}{c_0}$$

du point de vue d'un observateur sur la rive du canal.

3 Cas non-linéaire - Remplissage d'un canal

On reprend les équations de Saint-Venant combinées sous la forme utilisée en cours :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_\pm \frac{\partial}{\partial x}\right) J_\pm = 0$$

Avec $c = \sqrt{g\, H}$, $\lambda_\pm = U \pm c$ et $J_\pm = U \pm 2\, c$.

1. Rappels de cours :

   (a) Rappeler la forme des équations des caractéristiques et l'expression de U et de c en tout point du plan (x, t) en fonction des invariants de Riemann J_-^0 et J_+^0.

   (b) Si $H = H_0$ pour tout $x > 0$ à $t = 0$, rappeler pourquoi les caractéristiques "+" et "-" sont des droites, et donner leur pente.

2. Une écluse est placée en $x = 0$. Pour $t < 0$, la hauteur est H_0 pour $x > 0$ et $U_0 = 0$. Un réservoir plus haut se trouve en $x < 0$. A $t = 0$, on ouvre les vannes de telle sorte que $H(0, t) = H_1 > H_0$ pour $t > 0$. Donc $c(0, t) = c_1 = \sqrt{g\, H_1} > c_0$. Décrire qualitativement (en deux lignes) ce qui se passe.
3. Déterminer la vitesse U_1 de l'écoulement en $x = 0$ pour $t > 0$.
4. Comparer la pente des caractéristiques "+" issue de $x = 0$ pour des temps $\tau > 0$ avec celle des caractéristiques "+" issues de $x > 0$ pour $t = 0$. Conclusion.
5. On suppose que le choc qui se forme a une vitesse constante V et que le profil de la vague reste un mur d'eau vertical. On se place maintenant dans le référentiel du choc.

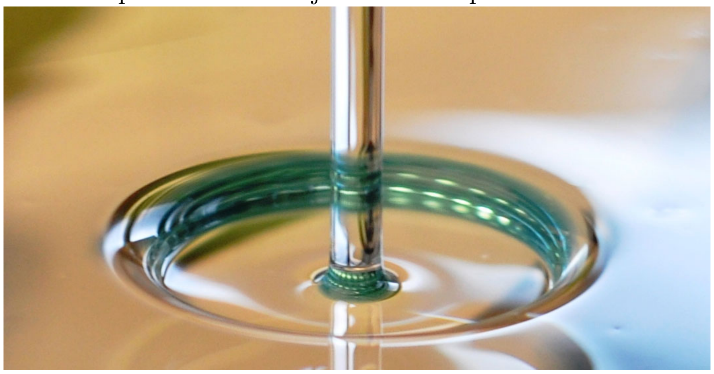
   (a) Ecrire la vitesse moyenne de l'écoulement V_0 en amont du choc (x grand) et la vitesse moyenne de l'écoulement V_1 en aval du choc (x petit, après avoir passé le choc) dans ce référentiel.

   (b) Ecrire le débit de l'eau avant et après le choc.

   (c) En déduire la vitesse du choc V. Commenter.

6. Tracer le diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t).

7. Vous avez probablement déjà observé ce phénomène dans votre évier :



© Alexis Duchesne, MSC - P7.

Pouvez-vous décrire qualitativement ce qui se passe à partir des résultats obtenus ci-dessus ?

N.B. : on parle ici de "ressaut hydraulique".

Cet exercice n'est pas totalement indépendant d'une application astrophysique. On pourra en particulier se reporter à l'expérience SWASI de Thierry Foglizzo et al. au CEA/SAp (PRL, 108, 051103, 2012) qui reproduit l'essentiel des instabilités dans un choc de Supernova à partir d'un ressaut hydraulique sur un "lavabo" dont le profil est bien choisi. L'article sera sur le site avec le corrigé de l'examen.

Deuxième partie

Corrigé

1 Equations de Saint-Venant

1. $z = 0$ au fond du canal, orienté vers le haut. Hauteur d'eau H. Donc :

$$P(x, z, t) = P_0 + \rho\, g\, (H(x, t) - z)$$

Donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\, g\, \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho\, g$$

2. Masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\, \frac{\partial u}{\partial x} + w\, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\, \frac{\partial P}{\partial x} = -g\, \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\, \frac{\partial w}{\partial x} + w\, \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\, \frac{\partial P}{\partial z} = g$$

3. L'équation d'advection est :

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)(z - H(x,t)) = 0$$

donc :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u\,\frac{\partial H}{\partial x} = w$$

4. L'autre condition aux limites en H est :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

La condition aux limites au fond est, en l'absence de frottement :

$$w = 0\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

5. Equations moyennes :

(a) Soit à calculer :

$$\int_0^{H(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dz + \int_0^{H(x,t)} \frac{\partial w}{\partial z}\,dz = 0$$

Or (relation de Liebniz) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,z)\,dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dz + \frac{db}{dx}\,f\left(x, b(x)\right) - \frac{da}{dx}\,f\left(x, a(x)\right)$$

donc :

$$\int_0^{H(x,t)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H(x)} f(x,z)\,dz - \frac{dH}{dx}\,f\left(x, H(x)\right)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H(x,t)} u\,dz - \frac{dH}{dx}\,u\left(x, H(x)\right) + w\left(x, H(x)\right) = 0$$

De plus :

$$-u\left(x, H(x)\right)\,\frac{\partial H}{\partial x} = -w\left(x, H(x)\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\,U\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

(b) On écrit Navier-Stokes sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u\,u}{\partial x} + \frac{\partial w\,u}{\partial z} = -g\,\frac{\partial H}{\partial x}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{H(x,t)} u\,dz - \frac{\partial H}{\partial t}\,u(H) + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H(x,t)} u^2\,dz - \frac{\partial H}{\partial x}\,u^2(H) + w(H)\,u(H) = -g\,\frac{\partial H}{\partial x}\,H$$

avec :

$$-u^2\,(H)\;\frac{\partial H}{\partial x} = -w\,(H)\;u(H) + \frac{\partial H}{\partial t}\,u(H)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(H\,U) + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H(x,t)} u^2\,dz + g\,\frac{\partial H}{\partial x}\,H = 0$$

Compte tenu des conditions d'écoulement et des conditions aux limites sur u, on suppose que :

$$\int_0^{H(x,t)} u^2\,dz \simeq U^2\,H$$

On obtient donc au final :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g\,\frac{\partial H}{\partial x}$$

2 Perturbation d'un état au repos

1. Les équations perturbées sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial h}{\partial x} = -H_0\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial u}{\partial x} = -g\,\frac{\partial h}{\partial x}$$

2. On obtient :

$$-\omega\,h_m + k\,U_0\,h_m = -k\,H_0\,u_m$$

$$-\omega\,u_m + k\,U_0\,u_m = -k\,g\,h_m$$

D'où (en cherchant à éliminer u_m et h_m de ces équations) :

$$u_m = -\frac{k\,g}{-w + k\,U_0}\,h_m$$

$$\left(-\omega + k\,U_0\right)^2 - H_0\,g\,k^2 = 0$$

On pose :

$$c_0 = \sqrt{H_0\,g}$$

et :

$$\omega_\pm = (U_0 \pm c_0)\;k$$

3. On retrouve une phase constante en $x + \delta x$ pour un temps $t + \delta t$ tel que :

$$k\;(x + \delta x) - \omega\;(t + \delta t) = k\,x - \omega\,t$$

$$\delta x = \frac{\omega}{k}\,\delta t$$

Donc, si $\omega > 0$, $x + \delta x$ est en aval de x, sinon il est en amont.

Il y a deux vitesses de phase pour les ondes. On défini le nombre de Froude par :

$$Fr = \frac{U_0}{c_0}$$

donc :

$$\omega_\pm = c_0\ (Fr \pm 1)\ k$$

On voit que ω_+ est toujours positif. En fonction de Fr on a deux comportements pour ω_- :

(a) Cas fluvial : $Fr < 1$ les ondes rétrogrades peuvent remonter le courant à la vitesse $U_0 - c_0$. L'observateur reçoit de l'information sur ce qui se passe en aval.

(b) Cas torrentiel : $Fr > 1$ les ondes sont emportées par le courant. L'observateur ne peut recevoir d'information.

3 Cas non-linéaire - Remplissage d'un canal

1. Rappels de cours :

   (a) On peut utiliser la méthode des caractéristiques :

   $$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\lambda_\pm} = \frac{dJ_\pm}{0}$$

   On voit donc que $J_\pm$ est conservé le long des caractéristiques. Celles-ci s'écrivent :

   $$\frac{dx}{dt} = \lambda_\pm$$

   On retrouve U et c à partir des invariants de Riemann par :

   $$U = \frac{J_+^0 + J_-^0}{2}$$

   $$c = \frac{J_+^0 - J_-^0}{4}$$

   (b) Si $H = H_0$ pour tout $x > 0$ à $t = 0$, alors toutes les caractéristiques "-" ont la même valeur pour tous les points de départ x :

   $$J_- = J_-^0 = U_0 - 2\sqrt{g\,H_0}$$

   Le long d'une caractéristique "+", J_+ est constant :

   $$J_+ = J_+^0 = U_0 + 2\sqrt{g\,H_0}$$

   Donc :

   $$U + 2\,c = J_+^0$$

   $$U - 2\,c = J_-^0$$

et donc :

$$U = \frac{J_+^0 + J_-^0}{2} = U_0$$

$$c = \frac{J_+^0 - J_-^0}{4} = \sqrt{g\, H_0} \Rightarrow H = H_0$$

Les caractéristiques "+" sont donc des droites parallèles de pente $U_0 + c_0$. De même les caractéristiques "-" sont des droites de pente $U_0 - c_0$.

2. Lorsqu'on ouvre les vannes, le canal va se remplir, et une vague va se propager de gauche à droite vers les x positifs.
3. En suivant une caractéristique "-" qui part des x positifs et abouti à l'axe $0t$, on a simultanément pour un temps τ :

$$J_- = U(0,\tau) - 2\, c(0,\tau) = J_-^0 = U_0 - 2c_0$$

Donc :

$$U(0,\tau) = U_1 = 2\ (c_1 - c_0)$$

Cette vitesse est positive, ce qui permet de maintenir le niveau à H_1 tout en ayant une onde de compression qui se propage vers les $x > 0$.

4. Les caractéristiques "+" sont des droites d'équation :

$$x = (U(0,\tau) + c_1(\tau))\ (t-\tau) = (3\, c_1 - 2\, c_0)\ (t - \tau)$$

depuis un point $(0,\tau)$ et d'équation :

$$x = c_0\, t + x_0$$

depuis un point $(x_0, 0)$. Or $c_1 > c_0$ donc $3\, c_1 - 2\, c_0 > c_0$. Les caractéristiques vont donc se couper, ce qui entrainerait un comportement non-physique (fonctions mutivaluées pour la vitesse et la hauteur). Il y a donc formation d'un choc.

5. Pour passer dans le référentiel du choc, on a un simple changement de référentiel galiléen. Donc :
   (a) Les vitesses sont :

$$V_0 = U_0 - V = -V$$

$$V_1 = U_1 - V$$

   (b) Les débits volumiques sont :

$$D_0 = V_0\, H_0\, L$$

$$D_1 = V_1\, H_1\, L$$

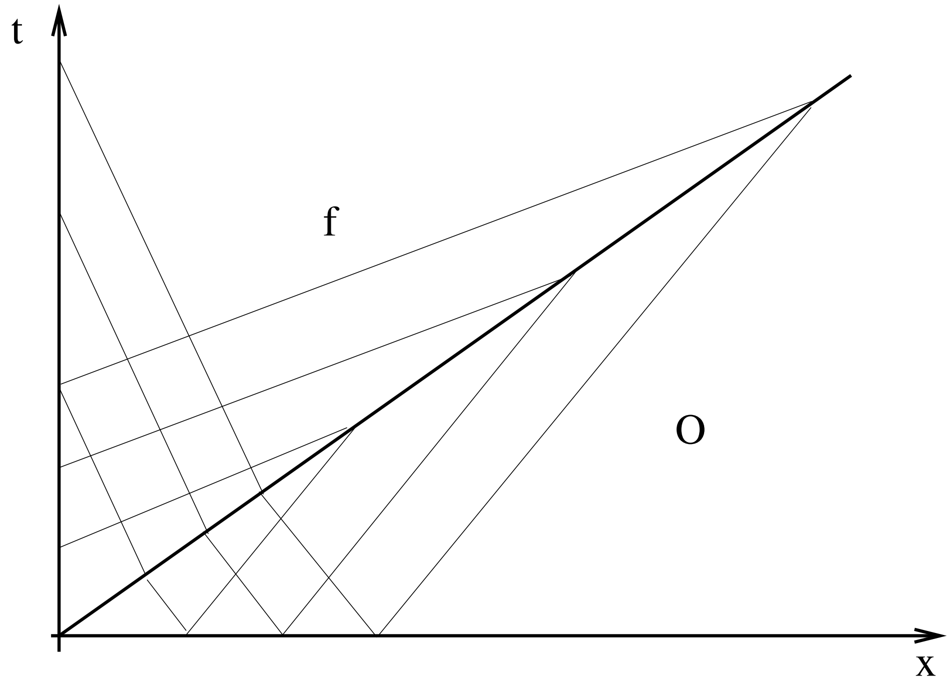
   (c) Conservation du débit :

$$V = U_1\, \frac{H_1}{H_1 - H_0}$$

$$V = 2\ (c_1 - c_0)\ \frac{c_1^2}{c_1^2 - c_0^2} = c_1\, \frac{2\, c_1}{(c_1 + c_0)}$$

On constate que $V > c_1$ Le choc se propage à une vitesse supérieure à celle des ondes de surface.

6. Diagramme (x, t) :



7. Dans le ressaut hydraulique, le référentiel du choc est aussi celui de l'observateur. Avant le choc, la hauteur d'eau est faible, et le fluide se propage plus vite que la vitesse des ondes de surface. Après le choc, la hauteur d'eau monte brutalement, et le fluide se propage moins vite que la vitesse des ondes. Pour mettre en équation ce problème, il faut refaire le même calcul (qualitativement), mais en coordonnées cylindriques.