Examen du 28 Octobre 2015

"In examinations the foolish ask questions that the wise cannot answer".
Oscar Wilde

Durée 2 heures. Tous les documents distribués en cours sont autorisés. On rappelle que : $G = 6.674\,10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, $k = 1.38\,10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$, $m_{\mathrm{H}} = 1.66\,10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{pc} = 3.0857\,10^{16}\,\mathrm{m}$.

1 Instabilité gravitationnelle

Ce problème est tiré de Charru, 2007, Section 2.2.2, p 47.

On considère un nuage constitué d'un gaz parfait au repos de densité ρ, pression P et température T soumis à son auto-gravité. Le potentiel gravitationnel Φ est lié à la distribution de masse par l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi\, G\, \rho \tag{1}$$

L'entropie du gaz parfait est donnée, pour un état de référence (P_0, ρ_0), par :

$$s - s_0 = c_V \, \log\left(\frac{P}{P_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\gamma}\right) \tag{2}$$

Les équations de conservation de la masse et de l'impulsion sont :

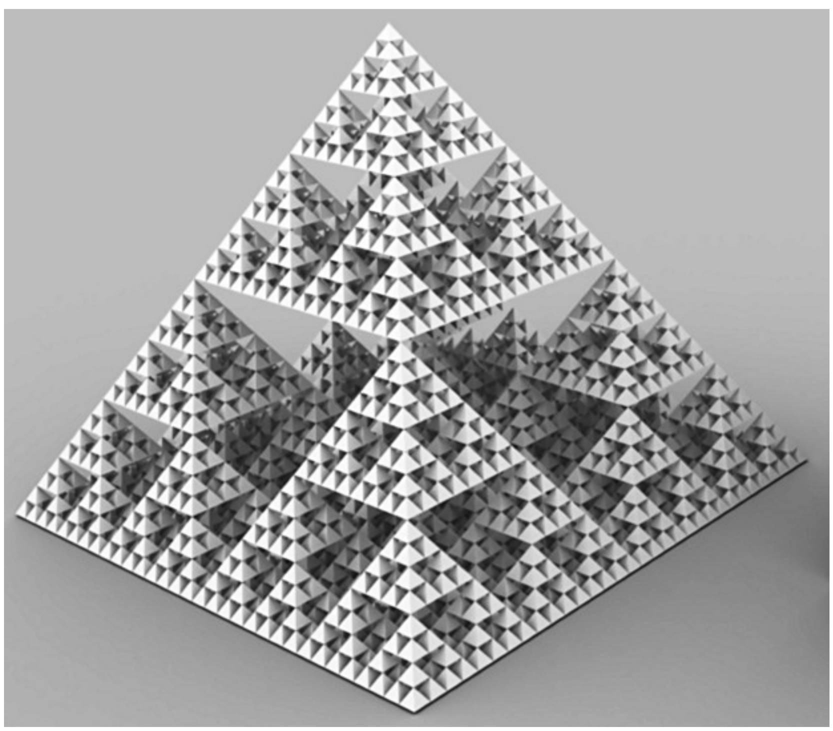
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\rho\,\overrightarrow{U}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{U}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P - \rho\,\overrightarrow{\nabla}\Phi \tag{4}$$

1. Montrer que ces équations n'admettent pas de solution à l'équilibre où ρ et P sont uniformes ("arnaque de Jeans"). Dans la suite on utilisera l'équation de Poisson uniquement pour les perturbations.
2. Pour un état de base, stationnaire ($\overrightarrow{U_0} = \overrightarrow{0}$) et uniforme ($\rho_0 = Cte$), écrire les équations linéarisées pour une perturbation isentropique. On pourra poser $c_s^2 = \gamma\,\dfrac{P_0}{\rho_0}$, et $X = X_0 + X_1$, où X est l'une des quantités $\overrightarrow{U}$, ρ, s, Φ, P.
3. En prenant la divergence de l'équation de l'impulsion, écrire une équation ne faisant intervenir que la pression P_1.

4. Dans la suite, on ne considérera qu'une seule variable d'espace x (la généralisation est immédiate). On cherche une solution sous la forme d'ondes planes de pulsation ω et de nombre d'onde k : $P_1(x,t) = \hat{P}\,\exp\left(i\,(kx - \omega t)\right)$. Déterminer la relation de dispersion entre ω et k pour qu'une telle solution soit possible.
5. Quel est le nombre d'onde critique k_J pour ces perturbations ? Quelle est la longueur L_J associée (longueur de Jeans) ? Discuter de la stabilité du nuage.
6. Application Numérique. Calculer L_J pour un nuage d'hydrogène atomique pur, de température $T = 10\,\mathrm{K}$ et de densité numérique $n_{\mathrm{H}} = 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$.
7. Quelle est la vitesse de phase $c(k)$ d'une onde en fonction de k_J et de son nombre d'onde k ? Tracer qualitativement $c(k)$.
8. Pour un nuage sphérique de température et de densité constante, soumis à sa seule gravité, quelle est, en ordre de grandeur, le temps de chute libre t_{ff} ? Discuter par rapport au temps de traversée de l'onde de nombre d'onde k.

2 Pyramide fractale



On construit ce fractal en partant d'une pyramide régulière. A chaque étape, une pyramide est remplacée par cinq pyramides de coté moitié, en laissant l'espace au centre vide.

1. Calculer la dimension fractale de recouvrement de la pyramide lorsque le processus est itéré à l'infini.

2. Dans le cadre du $\beta-$modèle d'intermittence de la turbulence, quelle est la valeur associée de β si la cascade se développe sur ce fractal ?
3. Dans une simulation numérique, combien d'étapes faut-il pour que le rapport des plus grandes échelles sur les plus petites soit supérieur à 10^3 ?
4. Quel est le nombre de Reynolds associé ?
5. Dans quelle fraction du volume est alors dissipée l'énergie turbulente ?

3 Solution - Instabilité gravitationnelle

1. Montrer que ces équations n'admettent pas de solution à l'équilibre où ρ et P sont uniformes ("arnaque de Jeans"). Dans la suite on utilisera l'équation de Poisson uniquement pour les perturbations.

Pour une vitesse $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$ et P et ρ constants, l'équation (4) donne :

$$\overrightarrow{\nabla}\Phi = \overrightarrow{0}$$

donc Φ est constant. Reporté dans (1), on obtient :

$$\rho = 0$$

C'est ce qu'on appelle "l'arnaque de Jeans" : la seule solution stationnaire uniforme possible, de taille finie, est le vide(!) Les discussions sur la façon de l'interpréter vont toujours bon train (voir Falco et al., 2013 par exemple), mais sont hors sujet ici.

2. Pour un état de base, stationnaire ($\overrightarrow{U_0} = \overrightarrow{0}$) et uniforme ($\rho_0 = Cte$), écrire les équations linéarisées pour une perturbation isentropique. On pourra poser $c_s^2 = \gamma \dfrac{P_0}{\rho_0}$, et $X = X_0 + X_1$, où X est l'une des quantités $\overrightarrow{U}$, ρ, s, Φ, P.

En ne gardant que les termes d'ordre 1 on obtient :

$$\Delta\Phi_1 = 4\pi\, G\, \rho_1$$

$$P_1 = \frac{\gamma\, P_0}{\rho_0}\, \rho_1 = c_s^2\, \rho_1$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\, \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{U_1} = 0$$

$$\rho_0\, \frac{\partial \overrightarrow{U_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} P_1 - \rho_0\, \overrightarrow{\nabla}\Phi_1$$

3. En prenant la divergence de l'équation de l'impulsion, écrire une équation ne faisant intervenir que la pression P_1.

On part de :

$$\rho_0\, \overrightarrow{\nabla} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{U_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} P_1 - \rho_0\, \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla}\Phi_1$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_s^2\, \Delta P_1 - 4\pi\, G\, \rho_0\, P_1 = 0$$

4. Dans la suite, on ne considérera qu'une seule variable d'espace x (la généralisation est

immédiate). On cherche une solution sous la forme d'ondes planes de pulsation ω et de nombre d'onde k : $P_1(x,t) = \hat{P}\,\exp\left(i\,(kx - \omega t)\right)$. Déterminer la relation de dispersion entre ω et k pour qu'une telle solution soit possible.

On injecte la solution potentielle dans l'équation d'onde. Ce qui donne :

$$\omega^2 = c_s^2\,k^2 - 4\pi\,G\,\rho_0$$

5. Quel est le nombre d'onde critique k_J pour ces perturbations ? Quelle est la longueur L_J associée (longueur de Jeans) ? Discuter de la stabilité du nuage.

Les perturbations ne s'amplifient pas si ω reste réel. Le critère de stabilité est donc :

$$c_s^2\,k^2 - 4\pi\,G\,\rho_0 > 0$$

$$k > k_J = \frac{\sqrt{4\pi\,G\,\rho_0}}{c_s}$$

La longueur de Jeans est donc :

$$L_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\gamma\,\pi\,P_0}{G\,\rho_0^2}}$$

6. Application Numérique. Calculer L_J pour un nuage d'hydrogène atomique pur, de température $T = 10\,\mathrm{K}$ et de densité numérique $n_\mathrm{H} = 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$.

On a $\rho_0 = m_\mathrm{H}\,n_\mathrm{H}$ et (gaz parfait) $\dfrac{P_0}{\rho_0} = \dfrac{k\,T}{\mu\,m_\mathrm{H}}$, avec $\mu = 1$ (hydrogène atomique) et $\gamma = \dfrac{5}{3}$.
Donc :

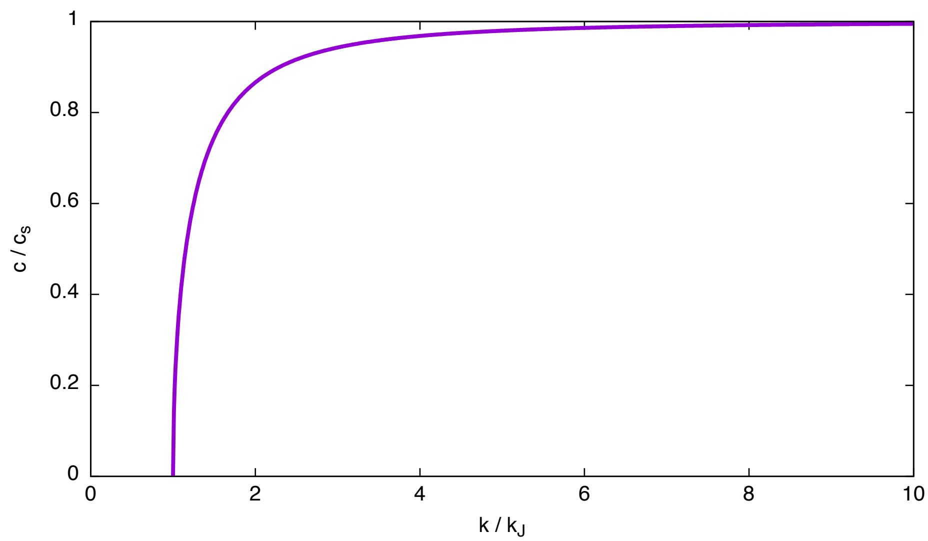
$$L_J = \sqrt{\frac{5\pi}{3}\,\frac{1}{G\,m_\mathrm{H}\,n_\mathrm{H}}\,\frac{k\,T}{m_\mathrm{H}}} = \sqrt{\frac{5\pi\,k}{3\,G\,m_\mathrm{H}^2}\,\frac{T}{n_\mathrm{H}}}$$

$$L_J = 6.3\,10^{20}\,\sqrt{\frac{T}{n_\mathrm{H}}} \simeq 2\,10^{16}\,\mathrm{m} = 0.64\,\mathrm{pc}$$

7. Quelle est la vitesse de phase $\omega(k)$ d'une onde en fonction de k_J et de son nombre d'onde k ? Tracer qualitativement $\omega(k)$.

La vitesse de phase est :

$$c(k) = \frac{\omega}{k} = c_s\,\sqrt{1 - \frac{k_J^2}{k^2}}$$



8. Pour un nuage sphérique de température et de densité constante, soumis à sa seule gravité, quelle est, en ordre de grandeur, le temps de chute libre t_{ff} ? Discuter par rapport au temps de traversée de l'onde de nombre d'onde k.

En calculant la "chute libre" comme si toute la masse était concentrée à l'origine (ce qui est raisonnable d'après le théorème de Poisson, puisque tout le nuage s'effondre), on a :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\,\frac{4\pi}{3}\,r_0^3\,\rho_0\,\frac{1}{r^2}$$

Cette équation est soluble, mais compliquée. Si on suppose de plus que le champ de pesanteur est constant et égal à la valeur initiale (ce qui est grossier, mais pas idiot), et que l'on peut remplacer r par r_0 à droite, on a :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\,\frac{4\pi}{3}\,r_0^3\,\rho_0\,\frac{1}{r_0^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = -G\,\frac{4\pi}{3}\,r_0^3\,\rho_0\,\frac{1}{r_0^2}\,t$$

$$r(t) = r_0 - G\,\frac{2\pi}{3}\,r_0^3\,\rho_0\,\frac{1}{r_0^2}\,t^2$$

Donc :

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}\,\frac{1}{G\,\rho_0}}$$

qui ne dépend ni de la taille, ni de la température du nuage [1].

1. Un calcul plus précis donne $t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32}\,\frac{1}{G\,\rho_0}}$, soit une erreur de 27%.

Par rapport à ce temps, le temps de traversée d'une onde est donc :

$$\frac{t(k)}{t_{ff}} = \frac{r_0}{c(k)\,t_{ff}} = \frac{r_0\,k_J}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-k_J^2}}$$

Le plus petit mode possible est $k_0 = \dfrac{2\pi}{r_0}$, qui est plus grand que k_J. Donc

$$\frac{t(k)}{t_{ff}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\,\frac{k_J}{k_0}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-k_J^2}}$$

Le temps $t(k)$ est donc grand par rapport à t_{ff} pour des k proches de k_J. Lorsque k augmente (donc pour des ondes de faible longueur d'onde), il tend vers $\dfrac{2\pi}{\sqrt{6}}\,\dfrac{k_J}{k_0}$. Il peut donc être inférieur à 1 pour des nuages "suffisamment" petits, et donc très stable gravitationnellement, mais qui peuvent être sensible au passage d'ondes sonores à hautes fréquences.

4 Solution - Pyramide fractale

On construit ce fractal en partant d'une pyramide régulière. A chaque étape, une pyramide est remplacée par cinq pyramides de coté moitié, en laissant l'espace au centre vide.

1. Calculer la dimension fractale de recouvrement de la pryramide lorsque le processus est itéré à l'infini.

On utilise des "pavés" en forme de pyramides. A chaque étape, le coté d'un pavé est divisé par 2, et leur nombre ets multiplié par 5. Partant d'un coté de taille initiale 1, on a donc la suite :

n	l_n	N_n
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	5
2	$\frac{1}{2^2}$	5^2
3	$\frac{1}{2^3}$	5^3

On voit que partant d'une longueur 1 à l'étape 0, à l'étape n il faut 5^n pavés de coté $l_n = \dfrac{1}{2^n}$. Si on écrit :

$$N_n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D$$

on a :

$$5^n = (2^n)^D$$

$$D = \frac{\log 5}{\log 2} \simeq 2.32$$

2. Dans le cadre du $\beta-$modèle d'intermittence de la turbulence, quelle est la valeur associée de β si la cascade se développe sur ce fractal ?

D'après le cours, on a directement :

$$\beta = \exp\left[(D-3)\,\log 2\right]$$

$$\beta = \exp\left[\left(\frac{\log 5}{\log 2} - 3\right)\,\log 2\right] = \frac{5}{8} = 0.625$$

3. Dans une simulation numérique, combien d'étapes faut-il pour que le rapport des plus grandes échelles sur les plus petites soit supérieur à 10^3 ?

On a :

$$2^9 = 512\,; \quad 2^{10} = 1024$$

Il faut donc 10 étapes successives pour atteindre le contraste demandé.

4. Quel est le nombre de Reynolds associé ?

On a :

$$\eta = L\,\left(R_L\right)^{-3/4}$$

Donc :

$$R_L = \left(\frac{L}{\eta}\right)^{4/3} = 2^{10\,\frac{4}{3}} \simeq 10^5$$

5. Dans quelle fraction du volume est alors dissipée l'énergie turbulente ?

La fraction de volume où se passe la dissipation est :

$$\beta^{10} \simeq 9\,10^{-3}$$

Références

Charru, F., "Instabilités Hydrodynamiques", 2007, EDP Sciences, CNRS Editions

Falco, M., Hansen, S.H., Wojtak, R., Mamon, G.A., 2013, MNRAS, 431, L6