Examen du 26 Octobre 2016

"In examinations the foolish ask questions that the wise cannot answer".
Oscar Wilde

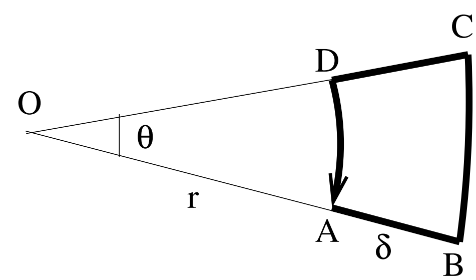
Durée 2.5 heures. Tous les documents distribués en cours sont autorisés (Poly, slides et notes personnelles). Les livres et l'accès au web sont interdits. On ne fera que les Applications Numériques (A.N.) demandées.

1 Vorticité

On considère un disque fluide en rotation képlerienne autour d'une masse M.

1. Donner la vitesse linéaire orthoradiale v_θ en fonction de la distance r au centre du disque. On négligera l'autogravitation du disque devant celle de la masse centrale.

2. Ecrire le flux de vorticité Φ perpendiculairement au plan du disque pour un élément de surface (A, B, C, D) pris dans le disque (δ et θ petits)



3. En faisant tendre δ vers 0, en déduire la valeur de la composante perpendiculaire ω_z de la vorticité en fonction de r. Tracer l'allure de $\omega_z(r)$.

2 Vent thermique

On utilise ici les résultats et les notations de la section 3.2 du poly. Dans tout le problème, on suppose que la température ne dépend que des coordonnées horizontales locales (x, y) et pas de la verticale z. En cours, nous avons montré que dans une atmosphère planétaire typique les équations du mouvement peuvent s'écrire :

— Suivant la verticale (équilibre hydrostatique) :

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

— Suivant l'horizontale (approximation géostrophique) :

$$u_x = -\frac{1}{f\,\rho}\,\frac{\partial P}{\partial y}\,; \quad u_y = \frac{1}{f\,\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x}$$

1. En utilisant l'équation d'état des gaz parfait $\frac{P}{\rho} = \frac{k\,T}{\mu\,m_{\mathrm{H}}}$, éliminer la densité ρ au profit de la température T, et faire apparaître les gradients de $\log P$.
2. En déduire le gradient vertical des composantes u_x et u_y de la vitesse.
3. Application. Sur Terre, on suppose qu'au niveau du front polaire (rencontre de l'air froid venu du pôle et de l'air chaud venant des tropiques) la vitesse du vent est nulle au niveau du sol, et le gradient moyen horizontal de température, parallèle à un méridien, est de 2 K par 100 km. Quelle est la vitesse du vent au niveau H de la tropopause ? A.N., $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $f = 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $H = 10^4\,\mathrm{m}$.
4. On rappelle que dans l'hémisphère Nord $f > 0$. Quelle est la direction dominante de ce vent (justifier) ? De quel phénomène s'agit-il ?

3 Turbulence galactique

1. Rappeler l'expression du taux de dissipation (massique) de l'énergie ϵ à l'échelle intégrale d'un milieu turbulent (argument de Kolmogorov). En déduire le taux de dissipation volumique si la masse volumique est ρ.
2. On suppose que globalement dans notre Galaxie, la dispersion de vitesse est U et la masse volumique moyenne du gaz interstellaire ρ. Quel est le taux de dissipation E_T d'énergie turbulente par unité de surface galactique et de temps ? A.N. $U \sim 10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $\rho \sim 2\,10^{-21}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.
3. Dans notre Galaxie, il y a environ 20 supernovae par million d'années et par kpc^2. Chaque supernova libérant environ 10^{44} J, estimer le taux d'injection d'énergie E_{SN} par unité de surface et de temps. Rappel : $1\,\mathrm{pc} \sim 3\,10^{16}$ m.
4. Les supernovae sont-elles suffisantes pour entretenir la turbulence galactique ?

4 Vorticité

On considère un disque fluide en rotation képlerienne autour d'une masse M.

1. Donner la vitesse linéaire orthoradiale v_θ en fonction de la distance r au centre du disque. On négligera l'autogravitation du disque devant celle de la masse centrale.
   La "force centrifuge" équilibre l'attraction gravitationnelle, donc :

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{G\,M}{r^2}$$

$$v_\theta = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$

2. Ecrire le flux de vorticité Φ perpendiculairement au plan du disque pour un élément de surface (A, B, C, D) pris dans le disque (δ et θ petits)

$$\Phi = \int_S \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\Phi = \int_B^C \overrightarrow{v}\,(r+\delta) \cdot \overrightarrow{dl} - \int_A^D \overrightarrow{v}\,(r) \cdot \overrightarrow{dl}$$

3. En déduire la valeur de la composante perpendiculaire ω_z de la vorticité en fonction de r.

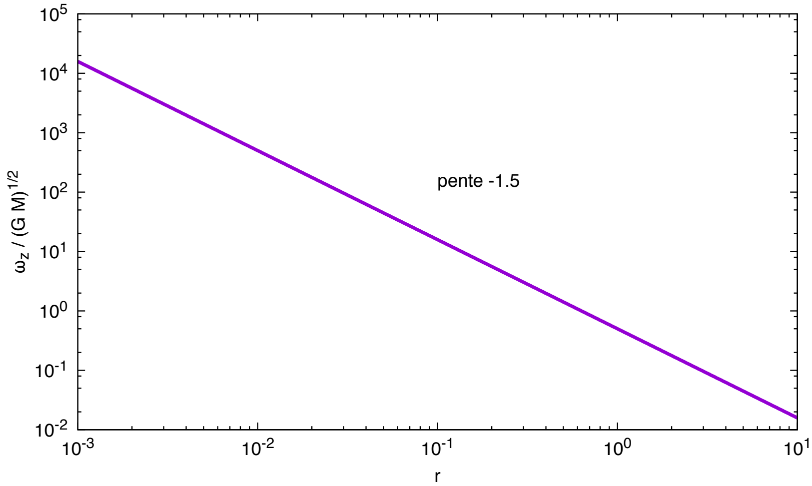
$$\Phi = v\,(r+\delta)\;(r+\delta)\;\theta - v\,(r)\;r\,\theta$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{G\,M}{r+\delta}}\;(r+\delta)\;\theta - \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\;r\,\theta = \omega\,S$$

   La surface est $S = \frac{\theta}{2}\left((r+\delta)^2 - r^2\right)$, donc :

$$\omega_z = \frac{\Phi}{S} = 2\sqrt{G\,M}\;\frac{\sqrt{r}\left(\sqrt{1+\frac{\delta}{r}} - 1\right)}{r^2\left(\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2 - 1\right)}$$

$$\omega_z = \frac{\sqrt{G\,M}}{2}\,r^{-3/2}$$



5 Vent thermique

On utilise ici les résultats et les notations de la section 3.2 du poly. Dans tout le problème, on suppose que la température ne dépend que des coordonnées horizontales locales (x, y) et pas de la verticale z. En cours, nous avons montré que dans une atmosphère planétaire typique les équations du mouvement peuvent s'écrire :

— Suivant la verticale (équilibre hydrostatique) :

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

— Suivant l'horizontale (approximation géostrophique) :

$$u_x = -\frac{1}{f\,\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\,; \quad u_y = \frac{1}{f\,\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

1. En utilisant l'équation d'état des gaz parfait $\frac{P}{\rho} = \frac{k\,T}{\mu\,m_{\mathrm{H}}}$, éliminer la densité ρ au profit de la température T, et faire apparaître les gradients de $\log P$.
   On obtient :
$$\frac{\partial \log P}{\partial z} = -g\,\frac{\mu\,m_{\mathrm{H}}}{k\,T}$$
$$u_x = -\frac{1}{f}\,\frac{k\,T}{\mu\,m_{\mathrm{H}}}\,\frac{\partial \log P}{\partial y}$$
$$u_y = \frac{1}{f}\,\frac{k\,T}{\mu\,m_{\mathrm{H}}}\,\frac{\partial \log P}{\partial x}$$

2. En déduire le gradient vertical des composantes u_x et u_y de la vitesse.

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{f}\,\frac{k}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(T\,\frac{\partial \log P}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{1}{f}\,\frac{k}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(T\,\frac{\partial \log P}{\partial x}\right)$$

Donc :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{f}\,\frac{k}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}\left(T\,\frac{\partial^2 \log P}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \log P}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{1}{f}\,\frac{k}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}\left(T\,\frac{\partial^2 \log P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \log P}{\partial x}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Or :

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial x \partial z} = g\,\frac{\mu\, m_{\mathrm{H}}}{k}\,\frac{1}{T^2}\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial y \partial z} = g\,\frac{\mu\, m_{\mathrm{H}}}{k}\,\frac{1}{T^2}\,\frac{\partial T}{\partial y}$$

Donc, en négligeant les variations verticales de température :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{g}{f\,T}\,\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{g}{f\,T}\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

3. Application. Sur Terre, on suppose qu'au niveau du front polaire (rencontre de l'air froid venu du pôle et de l'air chaud venant des tropiques) la vitesse du vent est nulle au niveau du sol, et le gradient moyen horizontal de température, parallèle à un méridien, est de 2 K par 100 km. Quelle est la vitesse du vent au niveau H de la tropopause ? A.N., $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $f = 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $H = 10^4\,\mathrm{m}$.
On a $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$, et $\dfrac{\partial T}{\partial y} < 0$. Le vent sera donc uniquement suivant la direction est-ouest.
En supposant des gradients constants, on a :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{g}{f\,T}\,\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$u_x(H) = -\frac{g}{f\,T}\,\frac{\partial T}{\partial y}\,H$$

On prend $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $f = 10^{-4}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -2\,10^{-5}\,\mathrm{K\,m^{-1}}$, $H = 10^4\,\mathrm{m}$, ce qui donne :

$$u_x(H) = 66\,\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

4. On rappelle que dans l'hémisphère Nord $f > 0$. Quelle est la direction dominante de ce vent (justifier) ? De quel phénomène s'agit-il ?
   Ce vent souffle majoritairement d'Ouest en Est dans l'hémisphère Nord. C'est ce qu'on appelle le "Jet stream".

6 Turbulence galactique

1. Rappeler l'expression du taux de dissipation (massique) de l'énergie ϵ à l'échelle intégrale d'un milieu turbulent (argument de Kolmogorov). En déduire le taux de dissipation volumique si la masse volumique est ρ.
   Pour une échelle L et une vitesse typique U_L, le temps de retournement est $\frac{L}{U_L}$, et le taux de dissipation massique est donc :
$$\epsilon \sim \frac{U_L^3}{L}$$
   Le taux de dissipation volumique est donc :
$$\rho\,\epsilon \sim \rho\,\frac{U_L^3}{L}$$
2. On suppose que globalement dans notre Galaxie, la dispersion de vitesse est U et la masse volumique moyenne du gaz interstellaire ρ. Quel est le taux de dissipation d'énergie turbulente par unité de surface galactique et de temps ? A.N. $U \sim 10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $\rho \sim 2\,10^{-21}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.
   Si L est l'échelle de hauteur de la Galaxie, le taux de dissipation E_T par unité de surface et de temps est donc :
$$E_T = \rho\,\epsilon\,L \sim \rho\,U_L^3$$
$$E_T = \rho\,U_L^3 \sim 2\,10^{-21}\,\left(10^4\right)^3 = 2\,10^{-9}\,\mathrm{kg\,s^{-3}}$$
   Or, $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$, donc :
$$E_T \sim 2\,10^{-9}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$$
3. Dans notre Galaxie, il y a environ 20 supernovae par million d'années et par kpc^2. Chaque supernova libérant environ 10^{44} J, estimer le taux d'injection d'énergie E_{SN} par unité de surface et de temps. Rappel : $1\,\mathrm{pc} \sim 3\,10^{16}\,\mathrm{m}$.
   On a :
$$E_{SN} \sim 20\,10^{44} / \left(3600 \times 24 \times 365\,10^6 \times \left(3\,10^{19}\right)^2\right)$$
$$E_{SN} \sim 7\,10^{-8}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$$

4. Les supernovae sont-elles suffisantes pour entretenir la turbulence galactique ?

   On a :

   $$\frac{E_{SN}}{E_T} \sim 35$$

   Il y a donc largement assez d'énergie libérée pour entretenir la turbulence observée.