

# Hydrodynamique et Turbulence

## Exercice - I

Jacques Le Bourlot  
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

Septembre 2014

# Accrétion sphérique

Tiré du cours de Jonathan Braithwaite

<http://www.astro.uni-bonn.de/~jonathan/>

- Corps massif sphérique dans fluide dilué
- On néglige la viscosité
- Evolution Lagrangienne isentropique
- On cherche une solution stationnaire
- Ecrire le flux de masse à travers une surface sphérique :

# Accrétion sphérique

Tiré du cours de Jonathan Braithwaite

<http://www.astro.uni-bonn.de/~jonathan/>

- Corps massif sphérique dans fluide dilué
- On néglige la viscosité
- Evolution Lagrangienne isentropique
- On cherche une solution stationnaire
- Ecrire le flux de masse à travers une surface sphérique :

$$4\pi r^2 \rho u = \text{Cte} = \dot{M}$$

- Différencier cette expression. Isoler  $\rho$ , faire apparaître  $u^2$  :

# Accrétion sphérique

Tiré du cours de Jonathan Braithwaite

<http://www.astro.uni-bonn.de/~jonathan/>

- Corps massif sphérique dans fluide dilué
- On néglige la viscosité
- Evolution Lagrangienne isentropique
- On cherche une solution stationnaire
- Ecrire le flux de masse à travers une surface sphérique :

$$4\pi r^2 \rho u = Cte = \dot{M}$$

- Différencier cette expression. Isoler  $\rho$ , faire apparaître  $u^2$  :

$$2r dr \rho u + r^2 d\rho u + r^2 \rho du = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dr} + \frac{1}{u} \frac{du}{dr} = \frac{2}{r} + \frac{1}{2u^2} \frac{du^2}{dr}$$

# *Accrétion sphérique*

- Ecrire Navier-Stokes stationnaire (radiale) :

# Accrétion sphérique

- Ecrire Navier-Stokes stationnaire (radiale) :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}$$

- Déterminer la vitesse d'échappement locale :

# Accrétion sphérique

- Ecrire Navier-Stokes stationnaire (radiale) :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}$$

- Déterminer la vitesse d'échappement locale :

$$v_e^2 = 2 \frac{GM}{r}$$

- Transformer N-S (faire apparaître la vitesse du son et la vitesse d'échappement) :

# Accrétion sphérique

- Ecrire Navier-Stokes stationnaire (radiale) :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}$$

- Déterminer la vitesse d'échappement locale :

$$v_e^2 = 2 \frac{GM}{r}$$

- Transformer N-S (faire apparaître la vitesse du son et la vitesse d'échappement) :

$$\frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{2} 2 \frac{GM}{r} \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{2} \frac{v_e^2}{r}$$



# *Accrétion sphérique*

Exercices

❖ Accrétion

- Suite :

# Accrétion sphérique

- Suite :

$$\frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} = c^2 \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{2u^2} \frac{du^2}{dr} \right) - \frac{1}{2} \frac{v_e^2}{r}$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \frac{du^2}{dr} = -\frac{1}{2r} v_e^2 \left( 1 - 4 \frac{c^2}{v_e^2} \right)$$

- Définir un rayon critique  $r_s$  :

# Accrétion sphérique

- Suite :

$$\frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} = c^2 \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{2u^2} \frac{du^2}{dr} \right) - \frac{1}{2} \frac{v_e^2}{r}$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \frac{du^2}{dr} = -\frac{1}{2r} v_e^2 \left( 1 - 4 \frac{c^2}{v_e^2} \right)$$

- Définir un rayon critique  $r_s$  :

$$r_s = \frac{GM}{2c^2}$$

$$r = 2 \frac{GM}{c^2} \frac{c^2}{v_e^2} = 4 r_s \frac{c^2}{v_e^2}$$

$$\frac{r}{r_s} = \frac{4c^2}{v_e^2}$$

# *Accrétion sphérique*

Exercices

❖ Accrétion

- Transformation finale de N-S :

# Accrétion sphérique

- Transformation finale de N-S :

$$\left(1 - \frac{c^2}{u^2}\right) \frac{du^2}{dr} = -\frac{1}{r} v_e^2 \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)$$

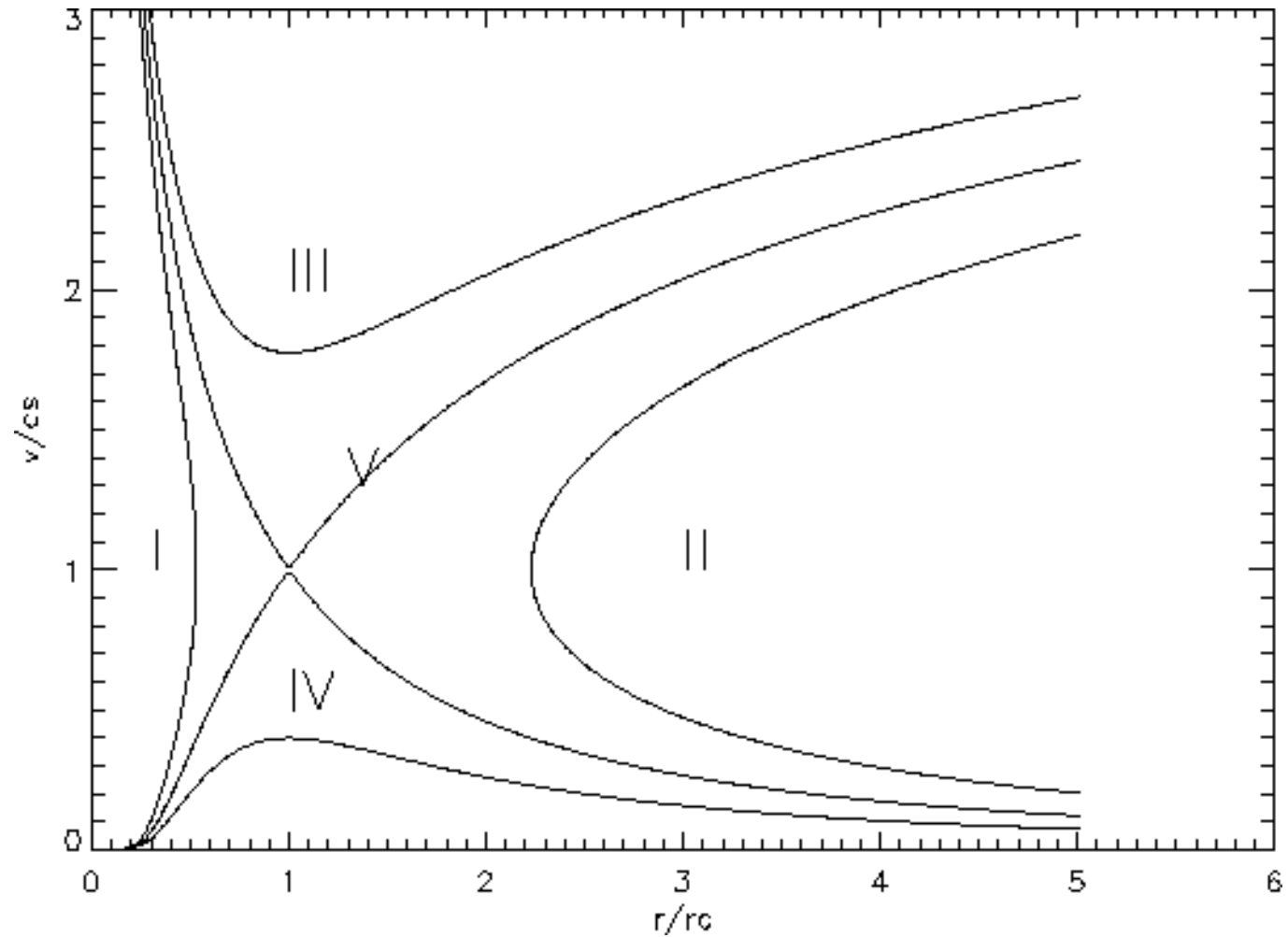
Equation de Bondi (1952) (ou Bondi-Hoyle)

- En allant de  $r = \infty$  à  $r = 0$  la vitesse passe par  $u = c$  en  $r = r_s$ .
- Taux d'accrétion à déterminer en fonction des conditions à l'infini.
- Pour aller au delà, il faut l'équation de l'énergie.

# Accrétion sphérique

Exercices

❖ Accrétion



© Jonathan Braithwaite