

# Hydrodynamique et Turbulence

## Exercice - II

Jacques Le Bourlot  
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

Septembre 2015

# Bulle de savon

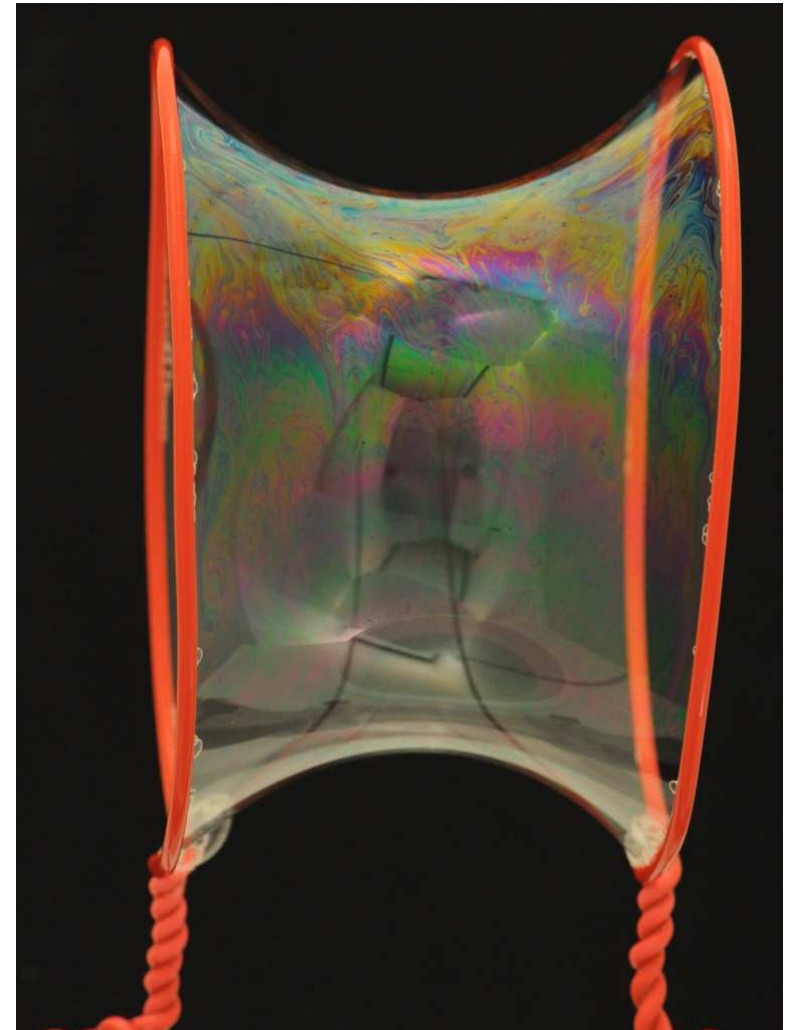
## Exercices

### ❖ Bulle

- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

Tiré de :  
“Instabilités  
Hydrodynamiques”,  
François Charru,  
EDP Sciences, 2007

- Anneaux : rayon  $a$
- Séparation :  $2d$
- Rayon mini :  $r_0$

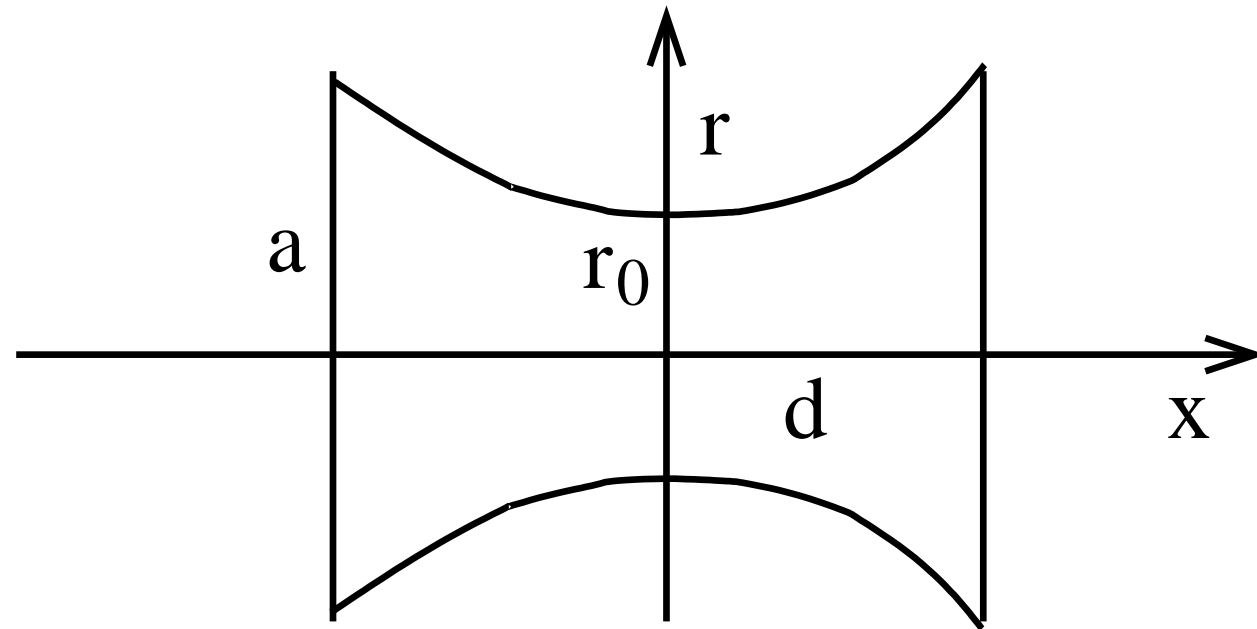


# Bulle de savon

## Exercices

### ❖ Bulle

- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité



- Loi de Laplace-Young :

$$P_2 - P_1 = \gamma \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right)$$

# *Bulle de savon*

## Exercices

### ❖ Bulle

- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

- Déterminer la forme de la bulle de savon.

# Bulle de savon

## Exercices

### ❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Déterminer la forme de la bulle de savon.
- $P_1 = P_2 \Rightarrow$  Courbure nulle

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0$$

# Bulle de savon

## Exercices

### ❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Déterminer la forme de la bulle de savon.
- $P_1 = P_2 \Rightarrow$  Courbure nulle

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0$$

- On pose  $X = \frac{x}{r_0}$ ,  $Y(X) = \frac{r}{r_0}$

# Bulle de savon

## Exercices

### ❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Déterminer la forme de la bulle de savon.
- $P_1 = P_2 \Rightarrow$  Courbure nulle

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0$$

- On pose  $X = \frac{x}{r_0}$ ,  $Y(X) = \frac{r}{r_0}$
- ATTENTION : erreur lors du cours du 23 septembre.  
Démonstration à venir.
- Caténoïde :

$$\frac{r}{r_0} = \cosh \frac{x}{r_0}$$

# *Bulle de savon*

Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Déterminer le rayon minimal  $r_0$  :



# Bulle de savon

Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Déterminer le rayon minimal  $r_0$  :

$$\frac{a}{d} \frac{d}{r_0} = \cosh \frac{d}{r_0}$$

# Bulle de savon

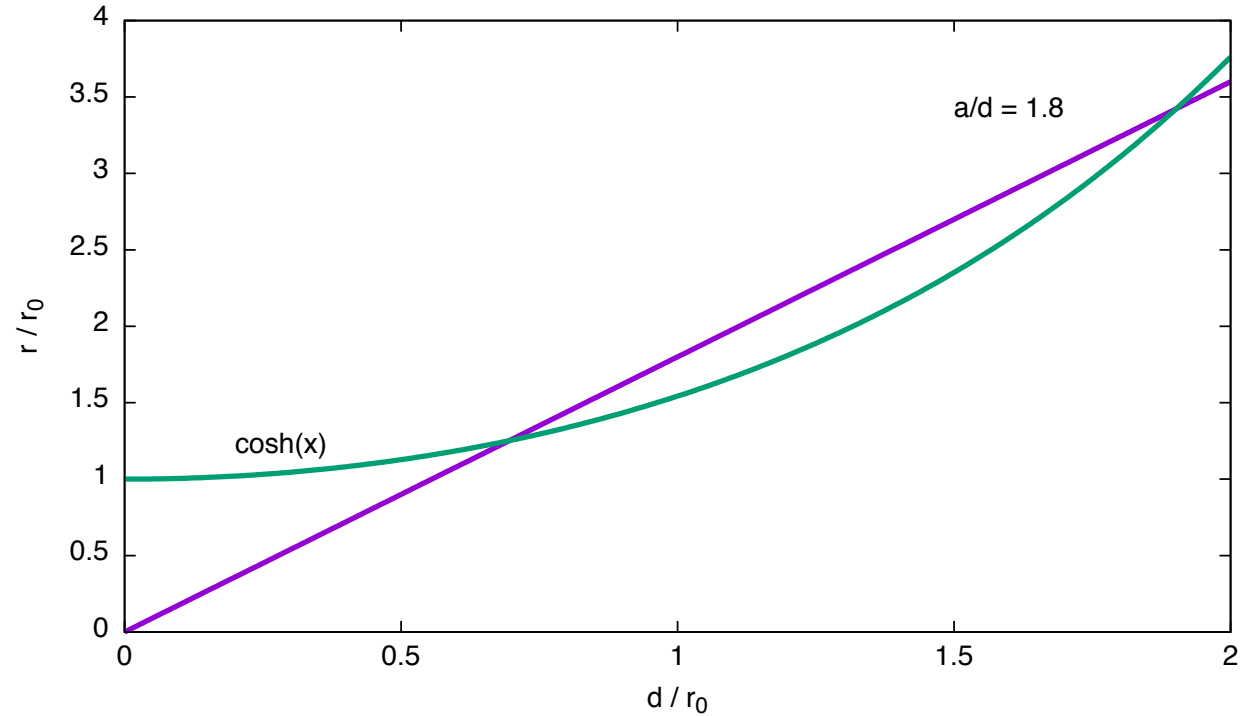
## Exercices

### ❖ Bulle

- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

- Déterminer le rayon minimal  $r_0$  :

$$\frac{a}{d} \frac{d}{r_0} = \cosh \frac{d}{r_0}$$



# Bulle de savon

## Exercices

### ❖ Bulle

- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

- Déterminer la taille maximale  $d_m$  :

# Bulle de savon

## Exercices

### ❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Déterminer la taille maximale  $d_m$  :
- On a  $\frac{d}{r_0}$  tel que :

$$\coth \frac{d}{r_0} = \frac{d}{r_0}$$

$$\frac{d}{r_0} \simeq 1.2$$

$$\frac{d}{a} = \frac{d}{r_0} \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}} \simeq 0.6627$$

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- La force linéique le long d'un élément  $dl$  d'interface est  $2\gamma dl$ . Quelle est la force exercée sur un anneau ?

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- La force linéique le long d'un élément  $dl$  d'interface est  $2 \gamma dl$ . Quelle est la force exercée sur un anneau ?
- On somme sur la circonférence, et on projette sur l'axe :

$$F = 4\pi a \gamma \cos \theta$$

$$r' = \sinh \frac{x}{r_0} = \tan \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}}$$

$$F = \frac{4\pi a \gamma}{\cosh \frac{d}{r_0}}$$

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Quelle est la variation de  $F$  lorsque  $d$  varie ?

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Quelle est la variation de  $F$  lorsque  $d$  varie ?
- Pour calculer  $\frac{dr_0}{dd}$ , on pourra dériver :

$$\frac{a}{r_0} = \cosh \frac{d}{r_0}$$



# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

❖ Bulle

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

❖ Stabilité

- Quelle est la variation de  $F$  lorsque  $d$  varie ?
- Pour calculer  $\frac{dr_0}{dd}$ , on pourra dériver :

$$\frac{a}{r_0} = \cosh \frac{d}{r_0}$$

- Pour une variation  $\delta d$  :

$$\delta F = \left( \frac{4\pi a \gamma}{\cosh \frac{d}{r_0}} \right)' \delta d$$

$$\frac{d}{dd} \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}} = -\frac{1}{r_0} \frac{\sinh \frac{d}{r_0}}{\cosh^2 \frac{d}{r_0}} \left( 1 - \frac{d}{r_0} \frac{dr_0}{dd} \right)$$

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

- ❖ Bulle
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

$$\frac{dr_0}{dd} = \frac{1}{\frac{d}{r_0} - \coth \frac{d}{r_0}}$$

$$\frac{d}{dd} \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}} \frac{1}{\frac{d}{r_0} - \coth \frac{d}{r_0}}$$

$$\delta F = \frac{4\pi \gamma}{\frac{d}{r_0} - \coth \frac{d}{r_0}} \delta d$$

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

- ❖ Bulle
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

$$\frac{dr_0}{dd} = \frac{1}{\frac{d}{r_0} - \coth \frac{d}{r_0}}$$

$$\frac{d}{dd} \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\cosh \frac{d}{r_0}} \frac{1}{\frac{d}{r_0} - \coth \frac{d}{r_0}}$$

$$\delta F = \frac{4\pi \gamma}{\frac{d}{r_0} - \coth \frac{d}{r_0}} \delta d$$

- Si  $\frac{d}{r_0} > \coth \frac{d}{r_0}$ ,  $\delta F$  est positif  $\Rightarrow$  instable.
- Si  $\frac{d}{r_0} < \coth \frac{d}{r_0}$ ,  $\delta F$  est négatif  $\Rightarrow$  stable.

# Stabilité de la bulle de savon

## Exercices

- ❖ Bulle
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité
- ❖ Stabilité

