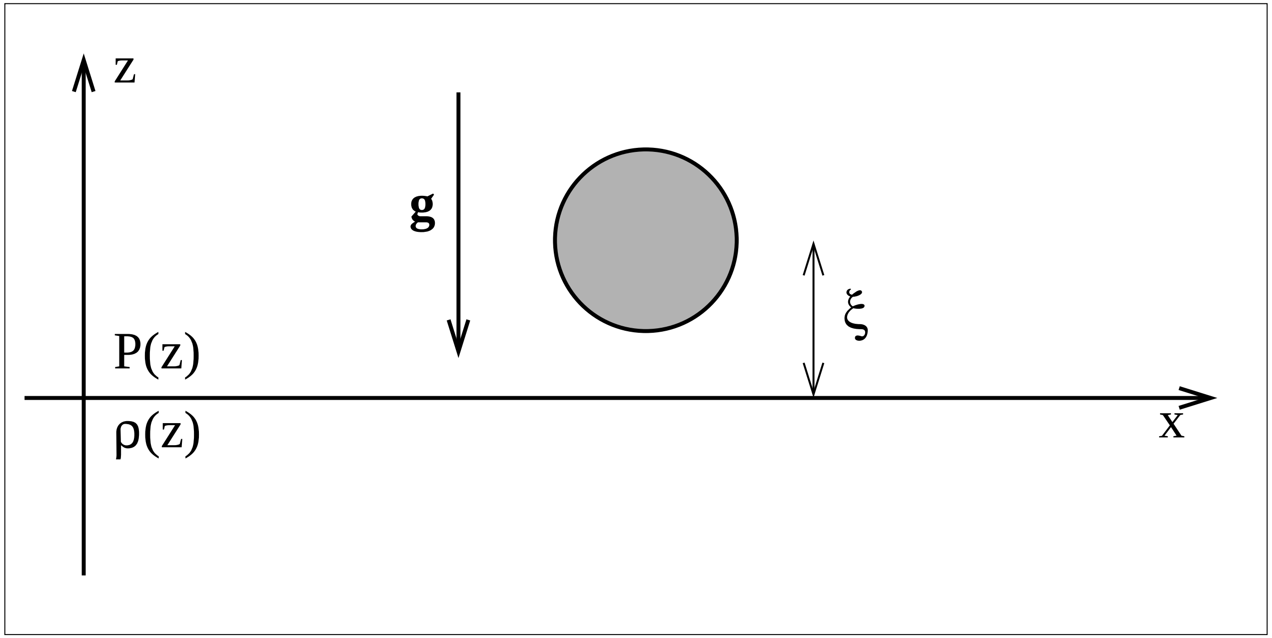
Hydrodynamique et Turbulence
Exercice - III

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

Octobre 2015

Instabilité convective

Tiré de : “An Introduction to Astrophysical Fluid Dynamics”, M.J. Thompsons, 2006,



Equilibre hydrostatique

Instabilité convective

- Ecrire $P\left(z+\xi\right)$ et $\rho\left(z+\xi\right)$ pour ξ petit.

Instabilité convective

- Ecrire $P\left(z+\xi\right)$ et $\rho\left(z+\xi\right)$ pour ξ petit.
- Au 1er ordre :

$$P\left(z+\xi\right)=P\left(z\right)+\xi\,\frac{dP}{dz}$$

$$\rho\left(z+\xi\right)=\rho\left(z\right)+\xi\,\frac{d\rho}{dz}$$

Instabilité convective

- Ecrire $P(z+\xi)$ et $\rho(z+\xi)$ pour ξ petit.
- Au 1er ordre :

$$P(z+\xi) = P(z) + \xi \frac{dP}{dz}$$

$$\rho(z+\xi) = \rho(z) + \xi \frac{d\rho}{dz}$$

- On suppose :
  - Equilibre de pression instantané
  - Temps thermique long (coef adiabatique γ)
  - On déplace une bulle de z à $z+\xi$

Instabilité convective

- Ecrire $\rho(z) + \delta\rho$ en fonction de $\rho(z)$, $P(z+\xi)$ et $P(z)$

Instabilité convective

Exercices

❖ Convection

- Ecrire $\rho\left(z\right)+\delta\rho$ en fonction de $\rho(z)$, $P(z+\xi)$ et $P(z)$
- On a :

$$\frac{P\left(z+\xi\right)}{P\left(z\right)}=\left(\frac{\rho\left(z\right)+\delta\rho}{\rho\left(z\right)}\right)^{\gamma}$$

$$1+\xi\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz}=\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^{\gamma}$$

Instabilité convective

- Ecrire $\rho\left(z\right)+\delta\rho$ en fonction de $\rho(z)$, $P(z+\xi)$ et $P(z)$
- On a :

$$\frac{P\left(z+\xi\right)}{P\left(z\right)}=\left(\frac{\rho\left(z\right)+\delta\rho}{\rho\left(z\right)}\right)^{\gamma}$$

$$1+\xi\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz}=\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^{\gamma}$$

- Linéariser cette expression.

Instabilité convective

- Ecrire $\rho\left(z\right) + \delta\rho$ en fonction de $\rho(z)$, $P(z+\xi)$ et $P(z)$
- On a :

$$\frac{P\left(z+\xi\right)}{P\left(z\right)} = \left(\frac{\rho\left(z\right)+\delta\rho}{\rho\left(z\right)}\right)^{\gamma}$$

$$1+\xi\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz} = \left(1+\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^{\gamma}$$

- Linéariser cette expression.
- Pour $\delta\rho$ petit :

$$\xi\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz} = \gamma\,\frac{\delta\rho}{\rho}$$

$$\delta\rho = \xi\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{\rho}{P}\,\frac{dP}{dz}$$

Instabilité convective

Exercices

❖ Convection

- Donner la condition d'équilibre en comparant $\rho(z+\xi)$ à l'extérieur et $\rho(z) + \delta\rho$ à l'intérieur de la bulle.

Instabilité convective

- Donner la condition d'équilibre en comparant $\rho(z+\xi)$ à l'extérieur et $\rho(z)+\delta\rho$ à l'intérieur de la bulle.
- Stable si :

$$\delta\rho > \xi\,\frac{d\rho}{dz}$$

$$\frac{1}{\gamma} < \frac{d\log\rho}{d\log P}$$

Instabilité convective

- Donner la condition d'équilibre en comparant $\rho(z+\xi)$ à l'extérieur et $\rho(z)+\delta\rho$ à l'intérieur de la bulle.
- Stable si :

$$\delta\rho > \xi \frac{d\rho}{dz}$$

$$\frac{1}{\gamma} < \frac{d\log\rho}{d\log P}$$

- Ecrire l'EDO de ξ

Instabilité convective

- Donner la condition d'équilibre en comparant $\rho(z+\xi)$ à l'extérieur et $\rho(z)+\delta\rho$ à l'intérieur de la bulle.
- Stable si :

$$\delta\rho > \xi\,\frac{d\rho}{dz}$$

$$\frac{1}{\gamma} < \frac{d\log\rho}{d\log P}$$

- Ecrire l'EDO de ξ
- Forces extérieures pour un volume V :
  - ✦ Poids : $-\left(\rho+\delta\rho\right)\,V\,g$
  - ✦ Archimède : $\left(\rho+\xi\,\frac{d\rho}{dz}\right)\,V\,g$

Instabilité convective

- PFD :

$$(\rho + \delta\rho)\, V\, \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\rho + \xi\, \frac{d\rho}{dz}\right) V\, g - (\rho + \delta\rho)\, V\, g$$

$$\left(\rho + \xi\, \frac{1}{\gamma}\, \frac{\rho}{P}\, \frac{dP}{dz}\right) \frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi\, \frac{d\rho}{dz}\, g - \xi\, \frac{1}{\gamma}\, \frac{\rho}{P}\, \frac{dP}{dz}\, g$$

Instabilité convective

- PFD :

$$(\rho + \delta\rho)\, V\, \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\rho + \xi\, \frac{d\rho}{dz}\right) V\, g - (\rho + \delta\rho)\, V\, g$$

$$\left(\rho + \xi\, \frac{1}{\gamma}\, \frac{\rho}{P}\, \frac{dP}{dz}\right) \frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi\, \frac{d\rho}{dz}\, g - \xi\, \frac{1}{\gamma}\, \frac{\rho}{P}\, \frac{dP}{dz}\, g$$

- Donner la fréquence d’oscillation :

Instabilité convective

- PFD :

$$(\rho + \delta\rho)\, V\, \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\rho + \xi\, \frac{d\rho}{dz}\right) V\, g - (\rho + \delta\rho)\, V\, g$$

$$\left(\rho + \xi\, \frac{1}{\gamma}\, \frac{\rho}{P}\, \frac{dP}{dz}\right) \frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi\, \frac{d\rho}{dz}\, g - \xi\, \frac{1}{\gamma}\, \frac{\rho}{P}\, \frac{dP}{dz}\, g$$

- Donner la fréquence d'oscillation :
- En négligeant le terme $\xi \times d^2\xi/dt^2$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + g\left(\frac{1}{\gamma}\, \frac{d\log P}{dz} - \frac{d\log\rho}{dz}\right) \xi = 0$$

Oscillateur harmonique.

Instabilité convective

- Pulsation :

$$\omega^2 = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \log P}{dz} - \frac{d \log \rho}{dz} \right)$$

$$\omega^2 = g \, \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{d \log \rho}{d \log P} \right)$$

Instabilité convective

- Pulsation :

$$\omega^2 = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \log P}{dz} - \frac{d \log \rho}{dz} \right)$$

$$\omega^2 = g \, \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{d \log \rho}{d \log P} \right)$$

- Eliminer dP/dz.

Instabilité convective

- Pulsation :

$$\omega^2 = g\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\log P}{dz} - \frac{d\log\rho}{dz}\right)$$

$$\omega^2 = g\,\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dz}\,\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{d\log\rho}{d\log P}\right)$$

- Eliminer dP/dz.
- Avec l'équilibre hydrostatique $P(z) = P_0 - \rho\, g\, z$:

$$\omega^2 = \frac{\rho\, g^2}{P}\,\left(\frac{d\log\rho}{d\log P} - \frac{1}{\gamma}\right)$$

Fréquence de Brunt-Väisälä

Instabilité convective

Exercices

❖ Convection

- Pour un gaz parfait, donner la condition d'instabilité en fonction de P et T

Instabilité convective

- Pour un gaz parfait, donner la condition d'instabilité en fonction de P et T
- Gaz parfait :

$$\log P = \log \rho + \log T + Cte$$

Instabilité :

$$\frac{1}{\gamma} > \frac{d\log P - d\log T}{d\log P}$$

$$\frac{d\log T}{d\log P} > 1 - \frac{1}{\gamma}$$

Critère de Schwarzschild !