Hydrodynamique et Turbulence
Exercice - II

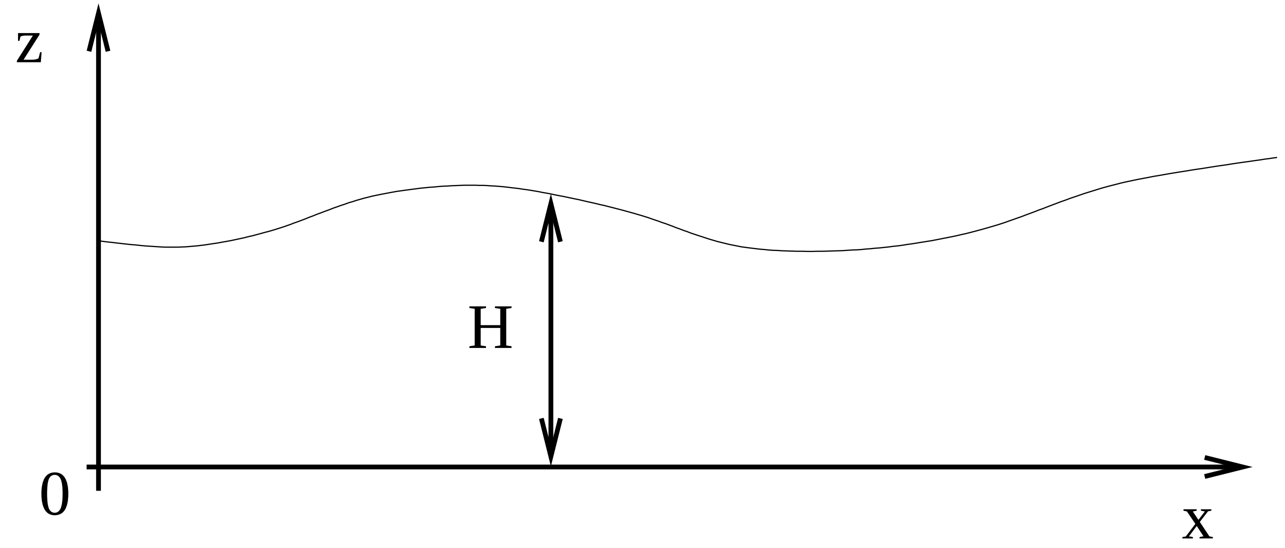
Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

Octobre 2014

Ecoulement dans un canal

Inspiré du cours de M2 “Hydrodynamique de l’environnement” de Olivier Thual
`thual.perso.enseeiht.fr/xsee/`

- Canal de largeur constante
- On néglige la viscosité
- Fluide incompressible



Equations de Saint-Venant

On admet les équations de Saint-Venant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U\,\frac{\partial H}{\partial x} = -H\,\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g\,\frac{\partial H}{\partial x}$$

Equations de Saint-Venant

On admet les équations de Saint-Venant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U\,\frac{\partial H}{\partial x} = -H\,\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g\,\frac{\partial H}{\partial x}$$

- $H = H(x,t)$: hauteur d'eau
- $U = U(x,t)$: vitesse moyenne suivant x :

$$U(x,t) = \frac{1}{H(x,t)} \int_0^{H(x,t)} u(x,z,t)\,dz$$

Solution non-linéaire

- Combiner les deux équations $(\pm\sqrt{\frac{g}{H}} \times (1) + (2))$

Solution non-linéaire

- Combiner les deux équations $(\pm\sqrt{\frac{g}{H}} \times (1) + (2))$

$$\pm\sqrt{\frac{g}{H}}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\pm\sqrt{\frac{g}{H}}U + g\right)\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$+ \left(\pm\sqrt{\frac{g}{H}}H + U\right)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(U \pm \sqrt{gH}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(U \pm 2\sqrt{gH}\right) = 0$$

Solution non-linéaire

- Combiner les deux équations $(\pm\sqrt{\frac{g}{H}} \times (1) + (2))$

$$\pm\sqrt{\frac{g}{H}}\,\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\pm\sqrt{\frac{g}{H}}\,U + g\right)\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$+\left(\pm\sqrt{\frac{g}{H}}\,H + U\right)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(U \pm \sqrt{gH}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(U \pm 2\sqrt{gH}\right) = 0$$

- On note $c = \sqrt{g\,H}$, $\lambda_\pm = U \pm c$ et $J_\pm = U \pm 2\,c$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_\pm \frac{\partial}{\partial x}\right) J_\pm = 0$$

Caractéristiques

- En déduire les équations des caractéristiques :

Caractéristiques

- En déduire les équations des caractéristiques :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\lambda_\pm} = \frac{dJ_\pm}{0}$$

$J_\pm$ est conservé le long de

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_\pm$$

- Retrouver U et c à partir des invariants de Riemann $J_\pm$

Caractéristiques

- En déduire les équations des caractéristiques :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\lambda_\pm} = \frac{dJ_\pm}{0}$$

$J_\pm$ est conservé le long de

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_\pm$$

- Retrouver U et c à partir des invariants de Riemann $J_\pm$

$$U = \frac{J_+^0 + J_-^0}{2}$$

$$c = \frac{J_+^0 - J_-^0}{4}$$

Caractéristiques

- Montrer que si $H = H_0$ pour tout $x > 0$ à $t = 0$, alors les caractéristiques sont des droites.

Caractéristiques

- Montrer que si $H = H_0$ pour tout $x > 0$ à $t = 0$, alors les caractéristiques sont des droites.
  Pour tout $x = a$ initial :

$$J_- = J_-^0 = U_0 - 2\sqrt{g\,H_0}$$

Le long de "+" :

$$J_+ = J_+^0 = U_0 + 2\sqrt{g\,H_0}$$

Donc :

$$U + 2\,c = J_+^0\,; \quad U - 2\,c = J_-^0$$

$$U = \frac{J_+^0 + J_-^0}{2} = U_0$$

$$c = \frac{J_+^0 - J_-^0}{4} = \sqrt{g\,H_0} \Rightarrow H = H_0$$

Onde de détente

- Ecluse en $x = 0$
- Pour $t < 0$, $H = H_0$ pour $x > 0$, $U_0 = 0$
- Pour $t \geqslant 0$, $H(0,t) = H_1 < H_0$, $c(0,t) = c_1 = \sqrt{g\, H_1} < c_0$
- Trouver la vitesse en $x = 0$ pour $t > 0$.

Onde de détente

- Ecluse en $x = 0$
- Pour $t < 0$, $H = H_0$ pour $x > 0$, $U_0 = 0$
- Pour $t \geqslant 0$, $H(0,t) = H_1 < H_0$, $c(0,t) = c_1 = \sqrt{g\,H_1} < c_0$
- Trouver la vitesse en $x = 0$ pour $t > 0$.

$$J_- = U(0,\tau) - 2\,c(0,\tau) = J_-^0 = U_0 - 2c_0$$

Donc :

$$U(0,\tau) = 2\,(c_1 - c_0)$$

- Commenter

Onde de détente

Exercices
- ❖ Ecoulement
- ❖ Saint-Venant
- ❖ Non-linéaire
- ❖ Caractéristiques
- ❖ Détente
- ❖ Carte
- ❖ Forme
- ❖ Forme

- Ecluse en $x = 0$
- Pour $t < 0$, $H = H_0$ pour $x > 0$, $U_0 = 0$
- Pour $t \geqslant 0$, $H(0,t) = H_1 < H_0$, $c(0,t) = c_1 = \sqrt{g\,H_1} < c_0$
- Trouver la vitesse en $x = 0$ pour $t > 0$.

$$J_- = U(0,\tau) - 2\,c(0,\tau) = J_-^0 = U_0 - 2c_0$$

Donc :

$$U(0,\tau) = 2\,(c_1 - c_0)$$

- Commenter

$$U(0,\tau) < 0$$

Onde de détente de gauche à droite et écoulement de droite à gauche pour maintenir $H(0,t) = H_1$ constant.

Carte des caractéristiques

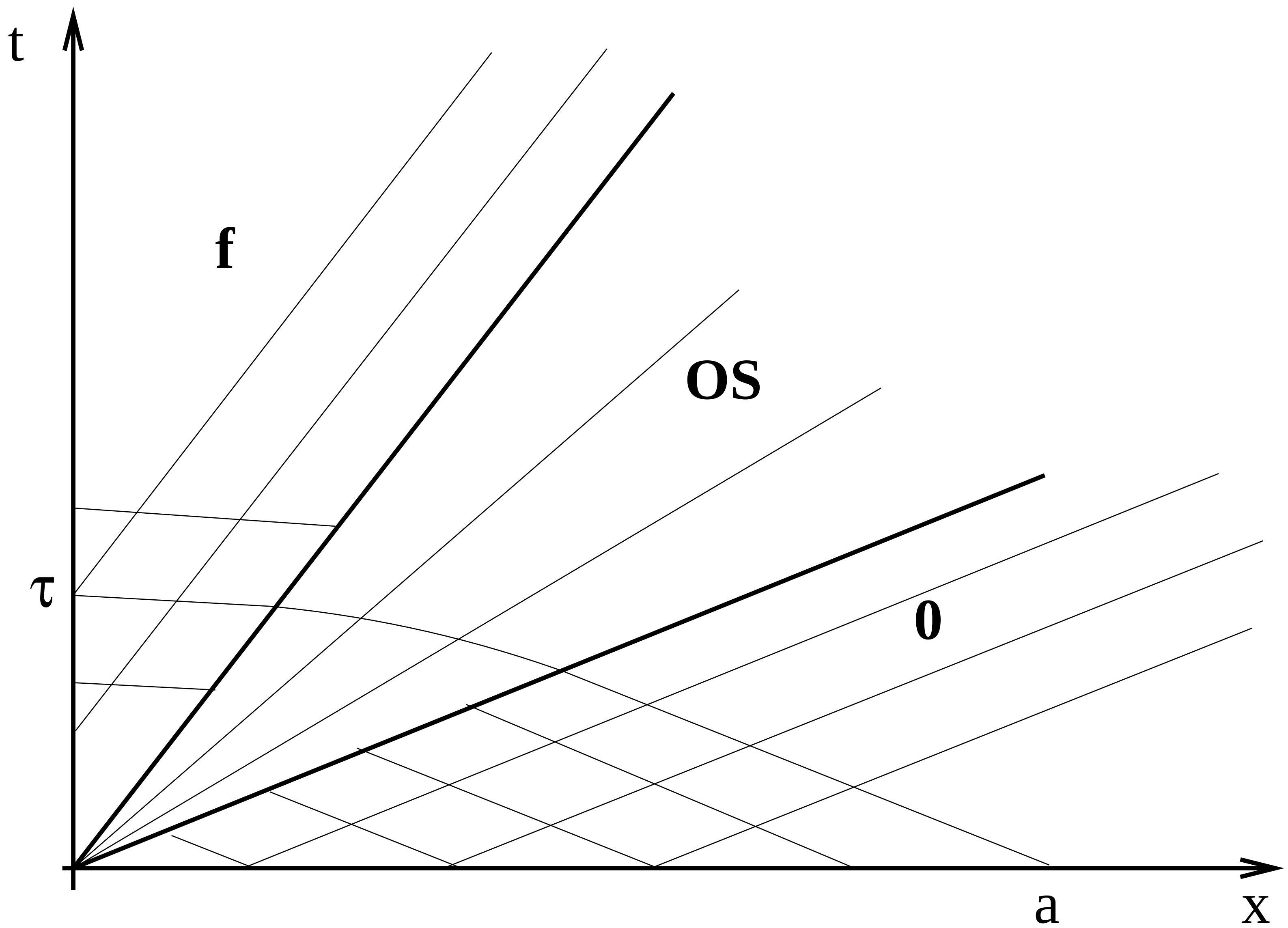
- Décrire l'ensemble des caractéristiques dans le plan (x, t)

Carte des caractéristiques

- Décrire l'ensemble des caractéristiques dans le plan (x, t)
- Caractéristiques "+" :
  - Droites de pente c_0 partant de l'axe des x
  - Droites de pente $U(0, \tau) + c_1 = 3\,c_1 - 2\,c_0$ partant de l'axe des t
  - Zone de propagation de l'onde entre les deux (la pente varie).
- Caractéristiques "-" :
  - Droites de pente $-c_0$ de l'axe des x à "0-OS"
  - Droites de pente $U_1 - c_1 = c_1 - 2\,c_0$ de "OS-f" à l'axe des t
  - Forme complexe entre les deux :

$$\frac{dx}{dt} = U(x, t) - c(x, t)$$

Carte des caractéristiques



Forme de l’onde

- Déterminer la forme de l’onde dans la zone intermédiaire “OS”

Forme de l'onde

- Déterminer la forme de l'onde dans la zone intermédiaire "OS"
  Pente de la caractéristique "+" : α, varie de c_0 à $3\,c_1 - 2\,c_0$
  Sur "+" :

$$x = (U(\alpha\,t, t) + c(\alpha\,t, t))\;t = \alpha\,t$$

  Sur "-" :

$$U(\alpha\,t, t) - 2\,c(\alpha\,t, t) = -2\,c_0$$

  Donc :

$$U(\alpha\,t, t) = \frac{2}{3}\,(\alpha - c_0)$$

$$c(\alpha\,t, t) = \frac{1}{3}\,(\alpha + 2\,c_0)$$

Forme de l’onde