Hydrodynamique et Turbulence - I

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

14 Septembre 2016

Rappels de Thermodynamique

- Equation d'état :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k\,T}{\mu\,m_{\mathrm{H}}}$$

Rappels de Thermodynamique

- Equation d'état :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k\,T}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}$$

- Energie interne spécifique :

$$U = \rho\,\mathcal{E}\,V$$

$$\mathcal{E} = < \frac{1}{2}\left|\mathbf{u}^2\right| > = c_{\mathrm{V}}\,T$$

Rappels de Thermodynamique

- Equation d'état :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k\,T}{\mu\,m_{\mathrm{H}}}$$

- Energie interne spécifique :

$$U = \rho\,\mathcal{E}\,V$$

$$\mathcal{E} =< \frac{1}{2}\left|\mathbf{u}^2\right| >= c_{\mathrm{V}}\,T$$

- Enthalpie spécifique : $H = U + PV = \rho\,h\,V$

$$h = c_{\mathrm{P}}\,T$$

$$\mathcal{E} + \frac{P}{\rho} = h$$

Rappels de Thermodynamique

- Capacités calorifiques :

$$\gamma = \frac{c_{\mathrm{P}}}{c_{\mathrm{V}}}$$

$$c_{\mathrm{P}} - c_{\mathrm{V}} = \frac{k}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}$$

Rappels de Thermodynamique

- Capacités calorifiques :

$$\gamma = \frac{c_\mathrm{P}}{c_\mathrm{V}}$$

$$c_\mathrm{P} - c_\mathrm{V} = \frac{k}{\mu\, m_\mathrm{H}}$$

$$c_\mathrm{V} = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{k}{\mu\, m_\mathrm{H}} = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{P}{\rho\, T}$$

$$c_\mathrm{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{k}{\mu\, m_\mathrm{H}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{P}{\rho\, T}$$

Rappels de Thermodynamique

- Capacités calorifiques :

$$\gamma = \frac{c_\mathrm{P}}{c_\mathrm{V}}$$

$$c_\mathrm{P} - c_\mathrm{V} = \frac{k}{\mu\, m_\mathrm{H}}$$

$$c_\mathrm{V} = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{k}{\mu\, m_\mathrm{H}} = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{P}{\rho\, T}$$

$$c_\mathrm{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{k}{\mu\, m_\mathrm{H}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{P}{\rho\, T}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{P}{\rho}$$

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{P}{\rho}$$

Rappels de Thermodynamique

- Entropie spécifique :

$$S = \rho\, s\, V = M\, s$$

- Entropie spécifique :

$$S = \rho\, s\, V = M\, s$$

- Entropie :

$$\delta Q = T\, dS = dU + P\, dV$$

$$\vdots$$

$$ds = c_{\mathrm{V}}\, d \log \left(P\, \rho^{-\gamma} \right)$$

Rappels de Thermodynamique

- Entropie spécifique :

$$S = \rho\, s\, V = M\, s$$

- Entropie :

$$\delta Q = T\, dS = dU + P\, dV$$

$$\vdots$$

$$ds = c_{\mathrm{V}}\, d \log \left(P\, \rho^{-\gamma}\right)$$

- Vitesse du son :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = c^2 = \frac{\gamma\, P}{\rho} = \frac{\gamma\, k\, T}{\mu\, m_{\mathrm{H}}}$$

Dérivée matérielle

On suit un volume dV emporté par le courant à la vitesse $\overrightarrow{u}$. Dans dV, une grandeur $f(\overrightarrow{r}, t)$ varie au cours du temps comme :

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{u}\,\delta t, t + \delta t\right) - f\left(\overrightarrow{r}, t\right)}{\delta t}$$

$$f\left(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{u}\,\delta t, t + \delta t\right) \simeq f\left(\overrightarrow{r}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial f}{\partial x_i}\,u_i\,\delta t$$

Donc :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \nabla$$

Dérivée matérielle

Pour une intégrale :

$$\frac{d}{dt}\int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV =$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\int_V f(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{u}\,\delta t, t+\delta t)\,dV - \int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV\right)$$

Dérivée matérielle

Pour une intégrale :

$$\frac{d}{dt}\int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV =$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\int_V f(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{u}\,\delta t, t+\delta t)\,dV - \int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV\right)$$

$$\int_V f(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{u}\,\delta t, t+\delta t)\,dV = \int_V \left(f(\overrightarrow{r},t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\,u_i\,\delta t + \frac{\partial f}{\partial t}\,\delta t\right)\,dV$$

Dérivée matérielle

Pour une intégrale :

$$\frac{d}{dt}\int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV =$$

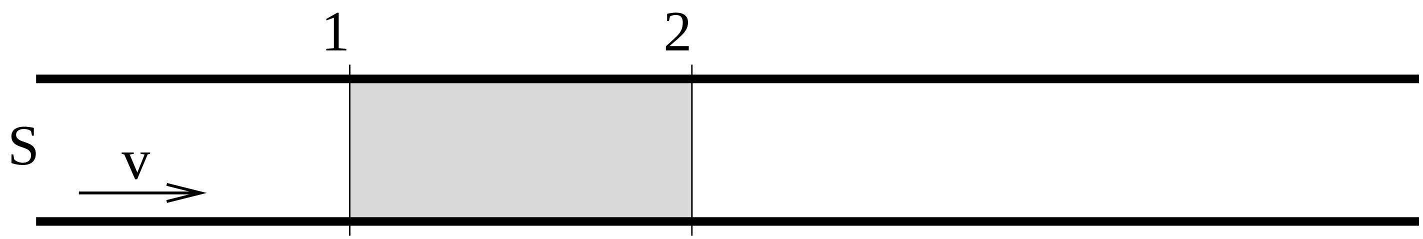
$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\int_V f(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{u}\,\delta t, t+\delta t)\,dV - \int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV\right)$$

$$\int_V f(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{u}\,\delta t, t+\delta t)\,dV = \int_V \left(f(\overrightarrow{r},t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\,u_i\,\delta t + \frac{\partial f}{\partial t}\,\delta t\right)\,dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\int_V u_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dV + \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dV\right)\,\delta t$$

$$\frac{d}{dt}\int_V f(\overrightarrow{r},t)\,dV = \int_V \left(u_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\,dV = \int_V \frac{Df}{Dt}\,dV$$

Équation de continuité

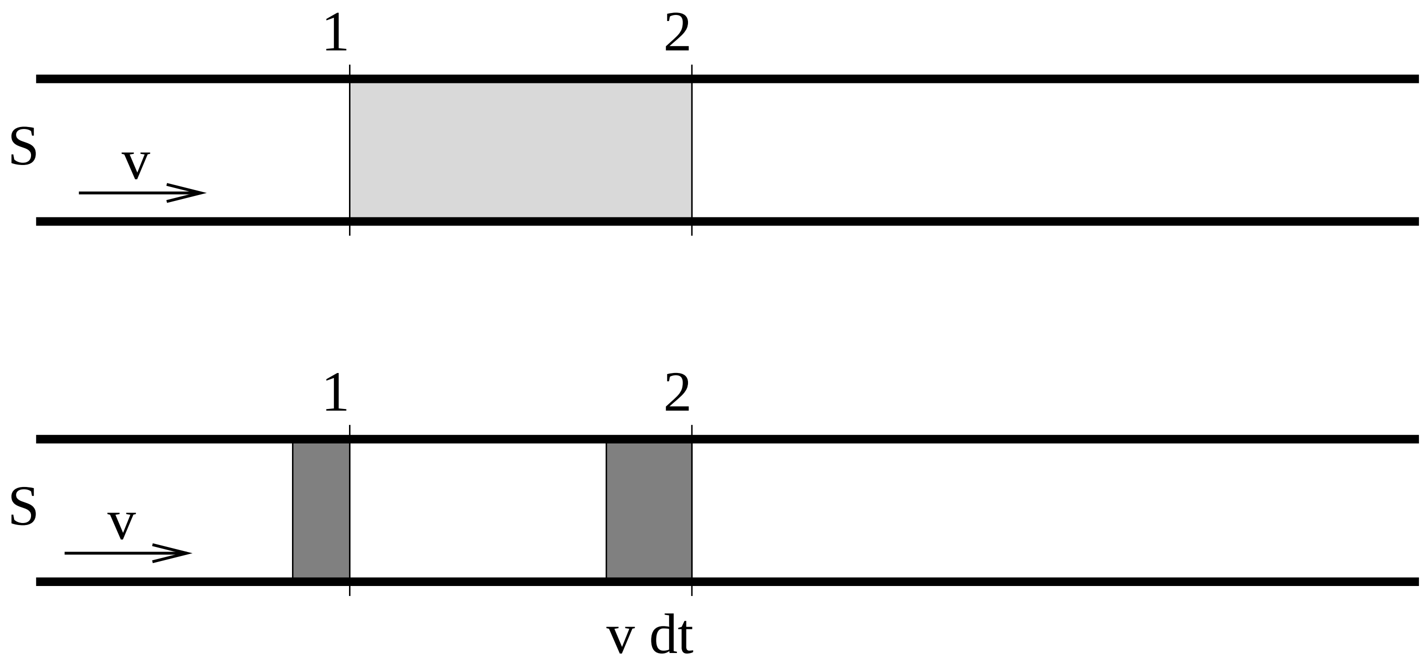


- Conservation de la masse :

$$M(t) = S \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx$$

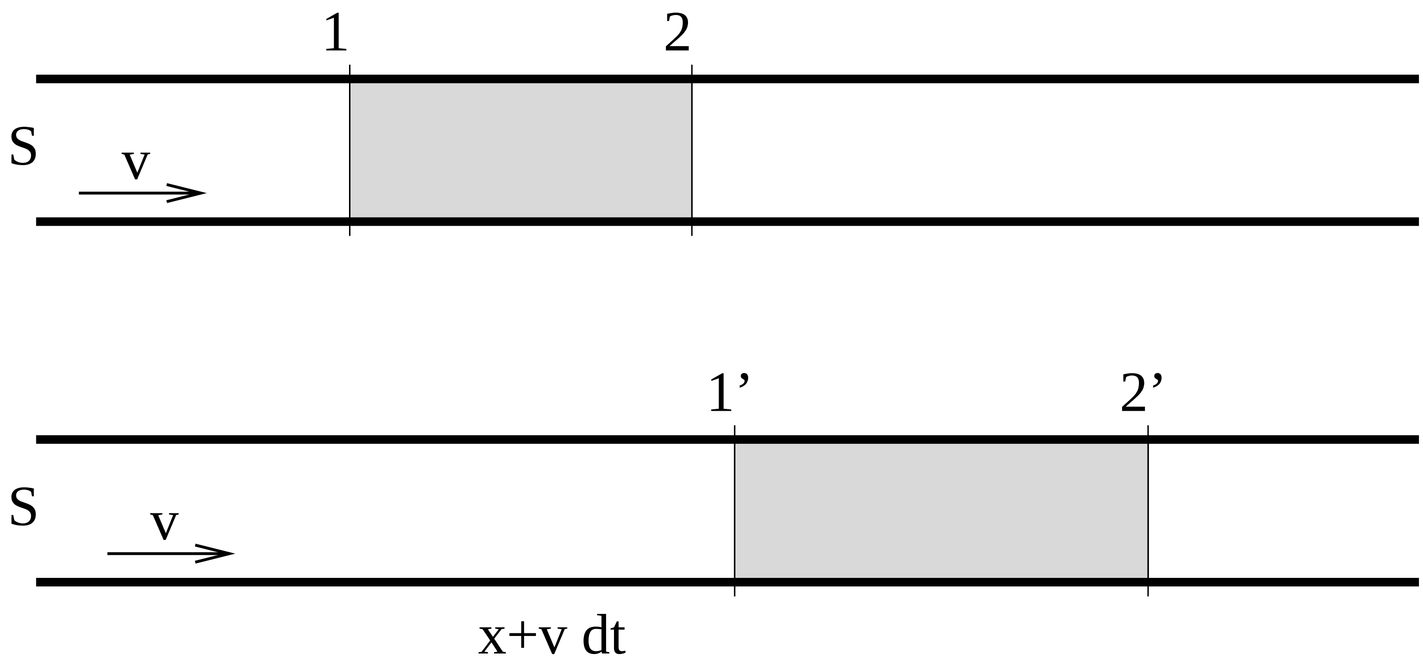
Il y a deux façons de voir ce que devient $M(t)$; suivant Euler ou Lagrange.

Point de vue Eulérien



Position fixe dans l'espace (référentiel du laboratoire)

Point de vue Lagrangien



On suit une “cellule” de fluide (référentiel lié au fluide)

Point de vue Eulérien

$$M(t) = S\,\rho(t)\,dx$$

$$M(t+dt) = S\,\rho(t+dt)\,dx$$

Variation = Entrées - Sorties :

$$M(t+dt) - M(t) = S\,\rho_1\,v_1\,dt - S\,\rho_2\,v_2\,dt$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\,v + \rho\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(\rho v) = 0$$

Point de vue Lagrangien

$$M(t) = S\,\rho(x,t)\,\left(x_2 - x_1\right)$$

$$M(t+dt) = S\,\rho(x+v\,dt, t+dt)\,\left(x_{2'} - x_{1'}\right)$$

La masse se conserve :

$$M(t+dt) - M(t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \rho}{\partial x}\,dx\right)\left(x_2 - x_1\right) + \rho\left(v_2 - v_1\right)\,dt = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\right) = 0$$

Équation de continuité (again)

- Pour un volume quelconque fixe :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\int_A \rho\, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}\, dA$$

- Théorème de la divergence (Ostrogradsky) :

$$\int_A \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{n}\, dA = \int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f}\, dV$$

- Donc, pour tout V :

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho\, \overrightarrow{u}) \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho\, \overrightarrow{u}) = 0$$

Masse - Volume

- Fluide compressible
- Elément de masse donné Lagrangien $\Rightarrow$ Le volume varie !

- Expansion/Rétraction de la frontière :

$$\frac{DV}{Dt} = \int_S \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}\, dA = \int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u}\, dV$$

Masse - Volume

- Fluide compressible
- Elément de masse donné Lagrangien $\Rightarrow$ Le volume varie !
- Expansion/Rétraction de la frontière :

$$\frac{DV}{Dt} = \int_S \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}\, dA = \int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u}\, dV$$

- Pour δV infinitésimal :

$$\frac{DV}{Dt} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u}\, \delta V$$

Masse - Volume

- Fluide compressible
- Elément de masse donné Lagrangien $\Rightarrow$ Le volume varie !
- Expansion/Rétraction de la frontière :

$$\frac{DV}{Dt} = \int_S \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \, dA = \int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} \, dV$$

- Pour δV infinitésimal :

$$\frac{DV}{Dt} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} \, \delta V$$

- Or :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

Conservation de la masse

- Donc :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\rho}{\delta V}\frac{D\delta V}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\left(\rho\,\delta V\right)}{Dt} = 0$$

Conséquence importante :

- Pour un volume "Lagrangien", où la masse se conserve et pour toute quantité scalaire α :

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\alpha\,dV = \int_V \rho\,\frac{D\alpha}{Dt}\,dV$$

- Ca ne veut **pas** dire qu'en général :

$$\frac{D\rho\,\alpha}{Dt} = \rho\,\frac{D\alpha}{Dt}$$

Conservation de l'impulsion

- Pour une composante i :

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, u_i\, dV = \int_V F_i\, dV + \int_S \sigma_{ij}\, n_j\, dA$$

  - F_i : Force en volume par unité de masse
  - σ_{ij} : Tenseur des contraintes de surface sur j en direction i

Conservation de l'impulsion

- Pour une composante i :

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, u_i\, dV = \int_V F_i\, dV + \int_S \sigma_{ij}\, n_j\, dA$$

  - F_i : Force en volume par unité de masse
  - σ_{ij} : Tenseur des contraintes de surface sur j en direction i

- Donc, pour tout V :

$$\int_V \left(\rho\,\frac{Du_i}{Dt} - F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right) dV = 0$$

$$\rho\,\frac{Du_i}{Dt} - F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Conservation de l'impulsion

- En développant et avec l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho\, u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, u_i\, u_j}{\partial x_j} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

ou :

$$\rho\, \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho\, u_j\, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Equation de Navier-Stokes compressible

- Reste à caractériser $\sigma_{ij} \Rightarrow$ dépend de la microphysique

Conservation de l'impulsion (bis)

En suivant l'évolution d'un volume V

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\overrightarrow{v}\,dV = \int_V \overrightarrow{F_V}\,dV + \int_S \bar{\bar{\sigma}}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

- $\overrightarrow{F_V}$: Efforts de volume
- $\bar{\bar{\sigma}}$: Tenseur des efforts de surface
  - Composante normale : effort de pression.
  - Composante tangentielle : cisaillement.

Les composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$ sont des forces par unité de surface, soit des contraintes (homogène à une pression), notées σ_{ij}.

Tenseur des contraintes

- Fluide au repos :

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Vrai quel que soit le référentiel $\Rightarrow \sigma_{ij} \propto$ l’identité.

Tenseur des contraintes

- Fluide au repos :

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Vrai quel que soit le référentiel $\Rightarrow \sigma_{ij} \propto$ l'identité.

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij}$$

$P \Rightarrow$ pression statique.

Tenseur des contraintes

- Fluide au repos :

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Vrai quel que soit le référentiel $\Rightarrow \sigma_{ij} \propto$ l'identité.

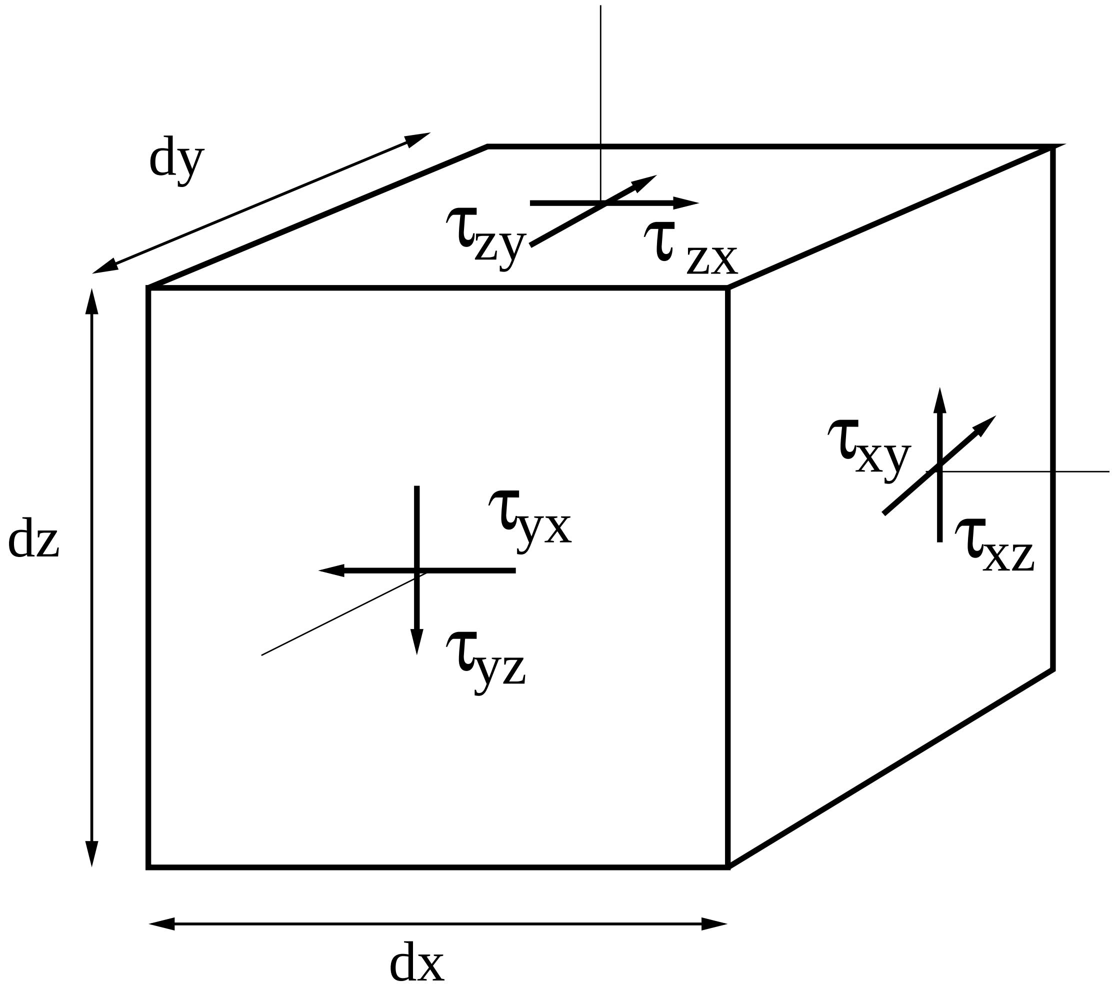
$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij}$$

$P \Rightarrow$ pression statique.

- Décomposition :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Tenseur des contraintes



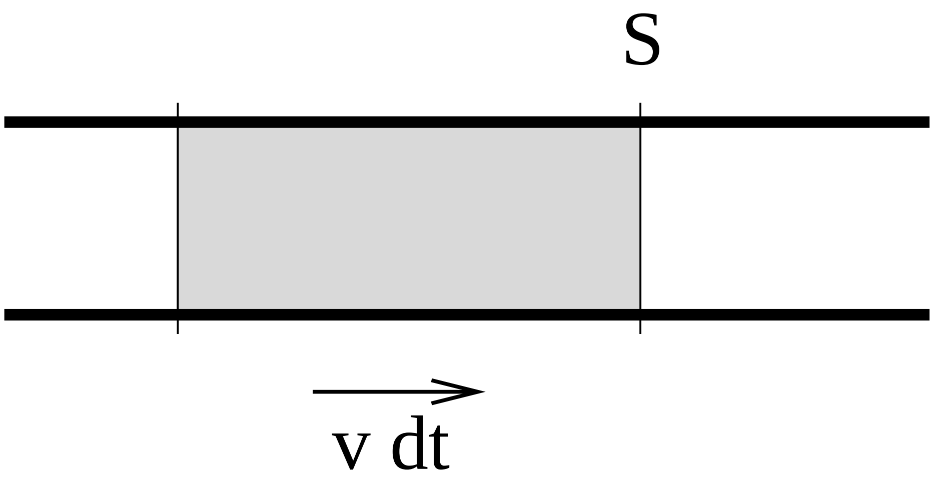
1er indice : facette, 2ème indice : direction

Modèle du $1/6$ *pour la viscosité*

- Les molécules ont toutes la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'agitation thermique, et se déplacent suivant les axes.

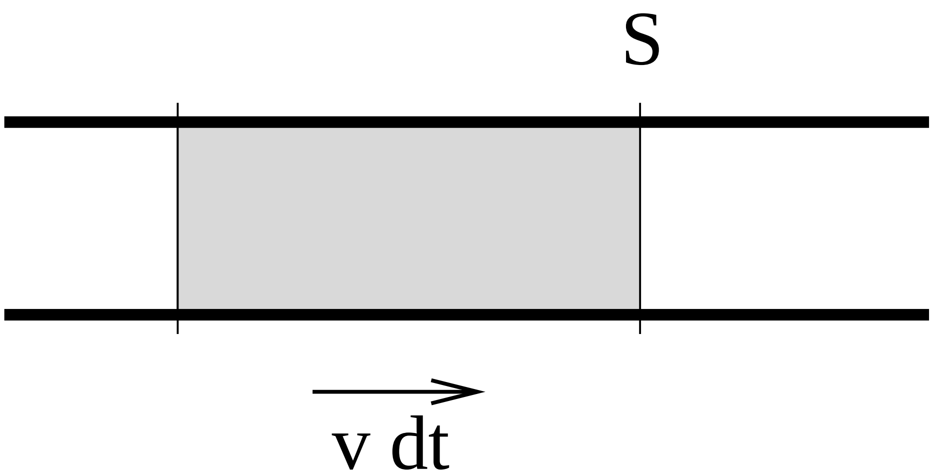
Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Les molécules ont toutes la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'agitation thermique, et se déplacent suivant les axes.



Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Les molécules ont toutes la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'agitation thermique, et se déplacent suivant les axes.



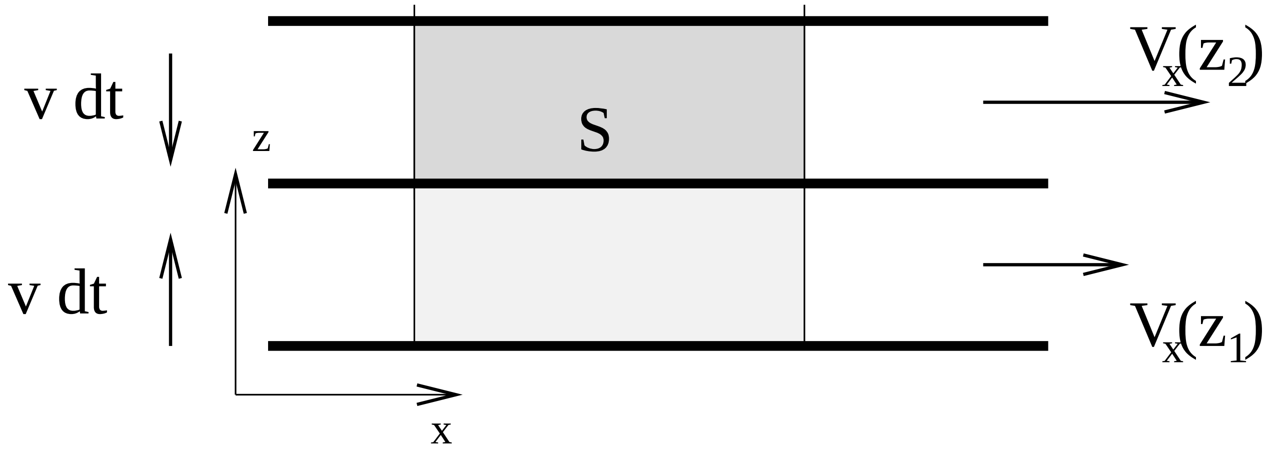
- Libre parcours moyen λ :

$$\lambda\,\sigma\,n = 1$$

σ : section efficace de collision
n : densité

Modèle du $1/6$ *pour la viscosité*

- Viscosité : transfert d'impulsion $\perp$.



Écoulement horizontal, avec un gradient vertical de la vitesse d'ensemble horizontale (cisaillement).

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Flux de quantité de mouvement :

$$d\,\overrightarrow{p} = \frac{1}{6}\,n\,S\,\bar{v}\,dt\,m\,\overrightarrow{V_x}(z_1) - \frac{1}{6}\,n\,S\,\bar{v}\,dt\,m\,\overrightarrow{V_x}(z_2)$$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\,\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{6}\,n\,\bar{v}\,m\,\left(\overrightarrow{V_x}(z_1) - \overrightarrow{V_x}(z_2)\right)$$

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Flux de quantité de mouvement :

$$d\,\overrightarrow{p} = \frac{1}{6}\,n\,S\,\bar{v}\,dt\,m\,\overrightarrow{V_x}(z_1) - \frac{1}{6}\,n\,S\,\bar{v}\,dt\,m\,\overrightarrow{V_x}(z_2)$$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\,\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{6}\,n\,\bar{v}\,m\,\left(\overrightarrow{V_x}(z_1) - \overrightarrow{V_x}(z_2)\right)$$

- Avec $dz \sim 2\,\lambda$

$$\frac{1}{S}\,\frac{d\,\overrightarrow{p}}{dt} = -\frac{1}{3}\,n\,\bar{v}\,m\,\lambda\,\frac{\partial\overrightarrow{V_x}}{\partial z}$$

- Donc :

$$\tau_{ij} \propto \frac{du_i}{dx_j}$$

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Viscosités
  - ✦ Dynamique :

$$\mu = \frac{1}{3}\,\rho\,\bar{v}\,\lambda = \frac{1}{3}\,\frac{m\,\bar{v}}{\sigma}$$

  - ✦ Cinématique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{v}}{n\,\sigma}$$

Modèle du $1/6$ pour la viscosité

- Viscosités
  - Dynamique :

$$\mu = \frac{1}{3}\,\rho\,\bar{v}\,\lambda = \frac{1}{3}\,\frac{m\,\bar{v}}{\sigma}$$

  - Cinématique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{v}}{n\,\sigma}$$

- μ ne dépend pas de n
- Si $n = Cte \Rightarrow \nu \propto T^{1/2}$
- Si $P = Cte \Rightarrow \nu \propto T^{3/2}$ (pour un gaz parfait)