Hydrodynamique et Turbulence - II

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

21 Septembre 2016

Tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

- Si incompressible :

$$\tau_{ij} = 2\rho\,\nu\,S_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

- Si incompressible :

$$\tau_{ij} = 2\rho\,\nu\,S_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- On montre que (fluide “Newtonien”) :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\,S_{kk}\,\delta_{ij}$$

Voir : `http://www.whoi.edu/profile/jpedlosky/`
Course 12.800 Chap 3, eq. 3.7.10

Tenseur des contraintes

- "Souvent" :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\,\mu$$

- Parfois :

$$\lambda = 0$$

- Attention à la définition de P (pression thermodynamique ?)
- De plus :

$$S_{kk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \overrightarrow{u}$$

- Terme en $\nabla \overrightarrow{u}$ important pour fluides "complexes".

Navier-Stokes

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{F_i}{\rho}$$

Avec μ constant :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + 2\mu\,S_{ij} - \frac{2}{3}\,\mu\,S_{kk}\,\delta_{ij}$$

Navier-Stokes

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{F_i}{\rho}$$

Avec μ constant :

$$\sigma_{ij} = -P\, \delta_{ij} + 2\mu\, S_{ij} - \frac{2}{3}\, \mu\, S_{kk}\, \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2S_{ij}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)$$

Navier-Stokes

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{F_i}{\rho}$$

Avec μ constant :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + 2\mu\, S_{ij} - \frac{2}{3}\,\mu\, S_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(2S_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)$$

Donc :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu\left(\nabla^2 v_i + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\right) + \frac{F_i}{\rho}$$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P + \nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P + \nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Temps de dissipation $\left(\nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v}\right)$: $t_\nu = \dfrac{l^2}{\nu}$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P + \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Temps de dissipation $\left(\nu \nabla^2 \overrightarrow{v}\right)$: $t_\nu = \dfrac{l^2}{\nu}$
- Temps dynamique $\left(\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v}\right)$: $t_d = \dfrac{l}{v}$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P + \nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Temps de dissipation $\left(\nu \, \nabla^2 \overrightarrow{v}\right)$: $t_\nu = \dfrac{l^2}{\nu}$
- Temps dynamique $\left(\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v}\right)$: $t_d = \dfrac{l}{v}$
- Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{t_\nu}{t_d} = \frac{l \, v}{\nu}$$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \rho \,\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \,\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla} P + \rho\, \nu\, \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) (\rho \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla} P + \rho \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Forces de dissipation $\left(\rho \nu \nabla^2 \overrightarrow{v} \right)$: $F_{vis} \sim \dfrac{\rho\nu\, v}{l^2}$

Nombre de Reynolds

Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla} P + \rho \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Forces de dissipation $\left(\rho \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}\right)$: $F_{vis} \sim \dfrac{\rho\nu\, v}{l^2}$
- Forces d'inertie $\left(\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \overrightarrow{v})\right)$: $F_{in} \sim \dfrac{\rho\, v^2}{l}$

Nombre de Reynolds

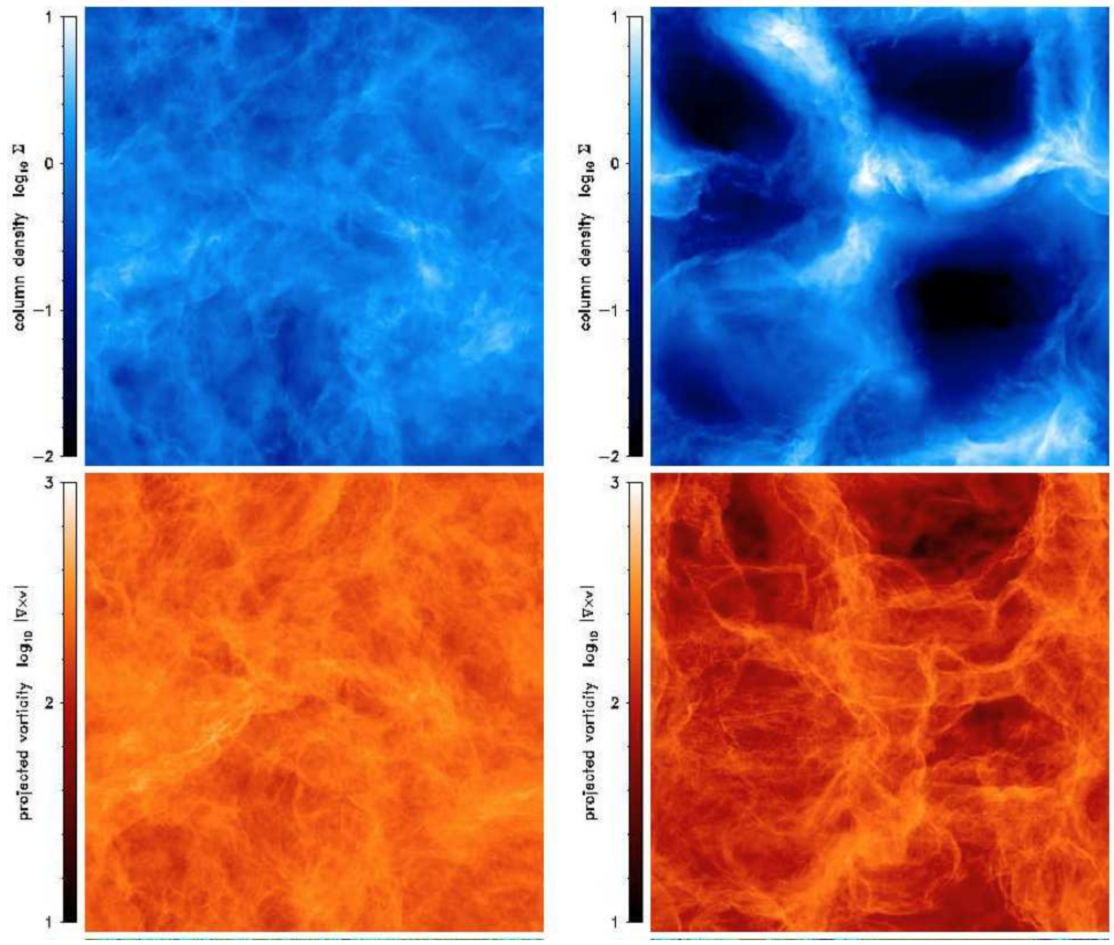
Cas incompressible, sans force en volume :

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla} P + \rho \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

- Forces de dissipation $\left(\rho \nu \nabla^2 \overrightarrow{v}\right)$: $F_{vis} \sim \frac{\rho \nu v}{l^2}$
- Forces d'inertie $\left(\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\rho \overrightarrow{v})\right)$: $F_{in} \sim \frac{\rho v^2}{l}$
- Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{t_\nu}{t_d} = \frac{F_{in}}{F_{vis}} = \frac{l\, v}{\nu}$$

Décomposition de Helmholz



Federath et al. (2009)

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0} \; ; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

Décomposition de Helmholz

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0}\ ; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \quad \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0\right)$$

Décomposition de Helmholz

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0}\ ; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \quad \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0\right)$$

Si :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = a\,; \quad \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$$

Décomposition de Helmholz

Décomposition de Helmholz :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_s}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{0}\ ; \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \quad \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0\right)$$

Si :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = a\,; \quad \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$$

Alors :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right) = a\,; \quad \overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla}\phi + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{u}$$

$$\nabla^2\phi = a\,; \quad \nabla^2\overrightarrow{A} = \overrightarrow{u}$$

Equations de Poisson.

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Donc :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_s}$$

Incompressibilité

$$\rho = Cte\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Donc :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_s}$$

Et :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla} \left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\, \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

Admis dans (presque) toute la suite

Localisation (incompressible)

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \, \vec{\nabla} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

Localisation (incompressible)

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu \overrightarrow{\nabla} \cdot \nabla^2 \overrightarrow{v}$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v}\right) - \overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}\right)$$

Localisation (incompressible)

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \, \vec{\nabla} \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{P}{\rho} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right)$$

Équation de Poisson, donc, si $\vec{v} \to \vec{0}$ à l'infini (Biot et Savart) :

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{4\pi} \int_V \frac{\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) \right]'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\mathbf{r}'$$

Équation **non-locale** !

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \phi$$

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \phi$$

Si $\rho = Cte$ et $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) (\overrightarrow{v}) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{F}$$

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi$$

Si $\rho = Cte$ et $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\overrightarrow{v}) = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{F}$$

$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}v^2$.

Ecoulement Potentiel

Inversement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\phi$$

Si $\rho = Cte$ et $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\vec{F}$$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)(\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2$. Si $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi$:

$$\vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + \vec{\nabla}\frac{P}{\rho} + \vec{\nabla}\frac{\Psi}{\rho} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} = f(t)$$

Bernoulli !

Fluide en rotation

- Rotation dominante : $\overrightarrow{\Omega}$, O sur l'axe, pour $\overrightarrow{A}$ quelconque :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A}$$

- Vrai pour la vitesse (absolue $\overrightarrow{U}$, relative $\overrightarrow{u}$) :

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Fluide en rotation

- Rotation dominante : $\vec{\Omega}$, O sur l'axe, pour $\vec{A}$ quelconque :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

- Vrai pour la vitesse (absolue $\vec{U}$, relative $\vec{u}$) :

$$\vec{U} = \vec{u} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- Donc :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R + 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

(Andrews, D.G., "An Int. to Atm. Physics", 2010)

Navier-Stokes en rotation

Reporté dans N-S :

$$\frac{D}{Dt}\overrightarrow{u} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} P + \nu \nabla^2 \overrightarrow{u} + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{F} - 2\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u} - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

- $-2\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u}$: Coriolis ($\sim 1.5\,10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ pour $u \sim 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- $-\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$: Centrifuge ($\Omega^2\,R \sim 3.4\,10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)

Navier-Stokes en rotation

Reporté dans N-S :

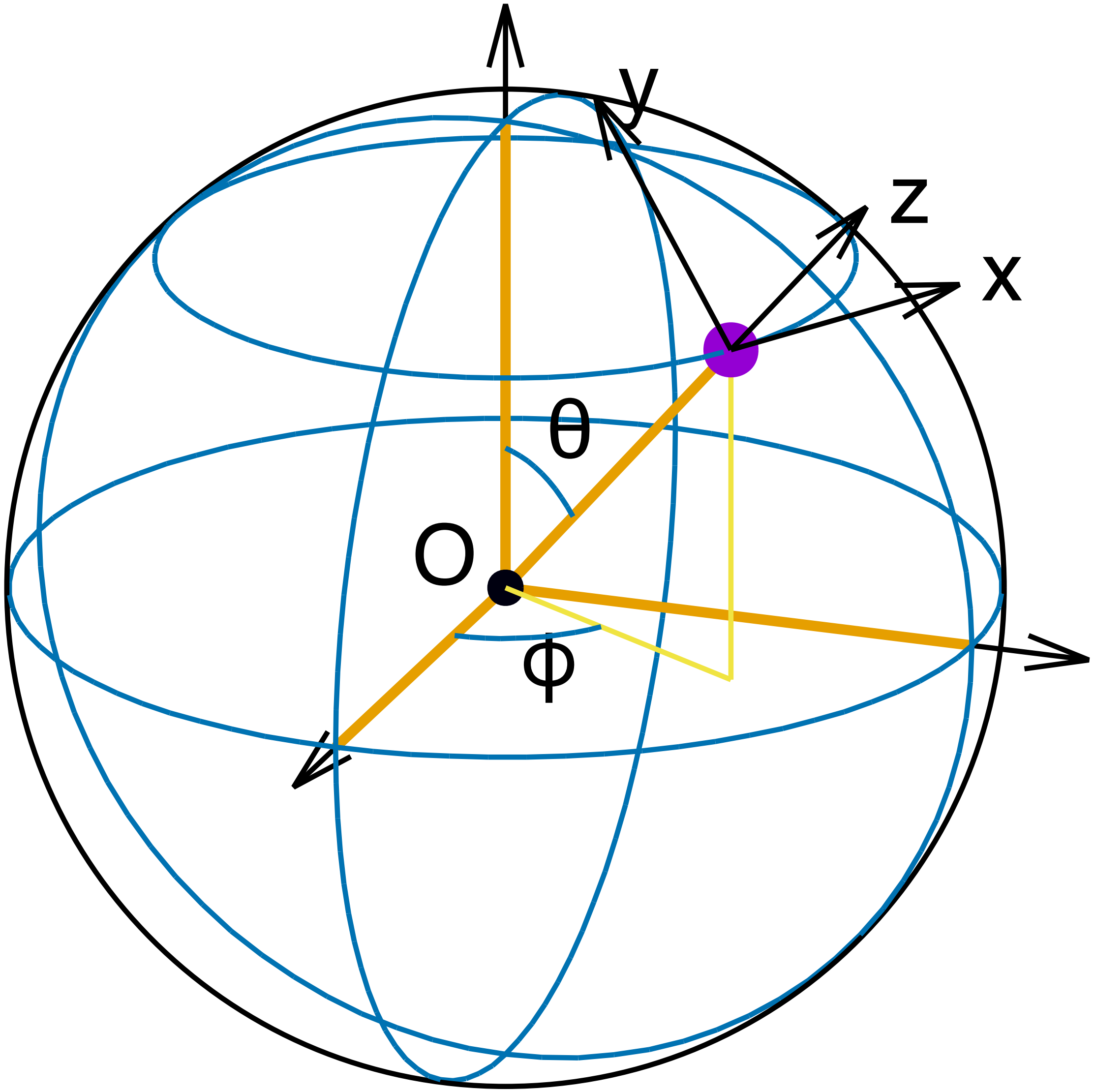
$$\frac{D}{Dt}\overrightarrow{u} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} P + \nu\nabla^2\overrightarrow{u} + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{F} - 2\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{u} - \overrightarrow{\Omega}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

- $-2\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{u}$: Coriolis ($\sim 1.5\,10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ pour $u \sim 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- $-\overrightarrow{\Omega}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$: Centrifuge ($\Omega^2 R \sim 3.4\,10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)
- Si $\overrightarrow{F}/\rho = -\overrightarrow{\nabla}\Phi'$:

$$\Phi = \Phi' + \Omega^2\frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} P + \nu\nabla^2\overrightarrow{u} - 2\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{u} - \overrightarrow{\nabla}\Phi$$

Planètes



Planètes (Terre)

Grandeur	Unité	Atmos	Océan
D. hor. (L)	m	10^6	10^6
D. ver. (H)	m	10^4	10^3
V. hor. (U)	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	10	10^{-1}
V. ver. (W)	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	10^{-1}	10^{-4}
T. car. ($L/U \sim H/W$)	s	10^5	10^7
Grad P hor. ($\Delta P/L$)	$\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$	10^{-3}	10^{-2}
Grad P ver. ($\Delta P/H$)	$\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$	10	10^4

Planètes (Terre)

Grandeur	Unité	Atmos	Océan
D. hor. (L)	m	10^6	10^6
D. ver. (H)	m	10^4	10^3
V. hor. (U)	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	10	10^{-1}
V. ver. (W)	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	10^{-1}	10^{-4}
T. car. $(L/U \sim H/W)$	s	10^5	10^7
Grad P hor. $(\Delta P/L)$	$\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$	10^{-3}	10^{-2}
Grad P ver. $(\Delta P/H)$	$\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$	10	10^4

- Facteur de Coriolis : $f = 2\,\Omega\,\cos\theta \sim 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$
- $\nu \sim 10^{-5}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ (atm), ou $\sim 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ (Océan)
- $\rho \sim 1\,\mathrm{kg\,m^3}$ (atm), ou $\sim 10^3\,\mathrm{kg\,m^3}$ (Océan)

$$2\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = f\ (-u_y, u_x, -\tan\theta\, u_x)$$

Planètes (Terre)

- Verticale :

$$\frac{\partial}{\partial t}u_z + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) u_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + f\ \tan\theta\, u_x + \nu\, \nabla^2 u_z$$

Planètes (Terre)

- Verticale :

$$\frac{\partial}{\partial t}u_z + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)u_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + f\ \tan\theta\, u_x + \nu\,\nabla^2 u_z$$

Terme	Echelle	Atmosphère	Océan
$\frac{\partial}{\partial t}u_z$	$\frac{W^2}{H}$	10^{-6}	10^{-11}
$\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)u_z$	$\frac{U\,W}{L}$	10^{-3}	10^{-11}
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$	$\frac{\Delta P}{\rho\,H}$	10	10
g	g	10	10
$f\ \tan\theta\,u_x$	$f\,U$	10^{-3}	10^{-5}
$\nu\,\nabla^2 u_z$	$\nu\,\frac{W}{H^2}$	10^{-14}	10^{-16}

Planètes (Terre)

- Verticale :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g$$

Equation de l'hydrostatique !

Planètes (Terre)

- Verticale :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g$$

Equation de l'hydrostatique !

- Si ρ constant :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho\, g\,; \quad P(x,y,z) = P_0(x,y) - \rho\, g\, z$$

Dans l'océan : 1 atmosphère tous les $10\,\mathrm{m}$.

- Si gaz parfait, $h_0 = \dfrac{k\,T}{\mu\, m_{\mathrm{H}}\, g}$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{P}{h_0}\,; \quad P(x,y,z) = P_0(x,y)\,\exp\left(-\frac{z}{h_0}\right)$$

Planètes (Terre)

- Horizontale (centrifuge négligée) :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) u_x = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x} + f\,u_y + \nu\,\nabla^2 u_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) u_y = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial y} - f\,u_x + \nu\,\nabla^2 u_y$$

Planètes (Terre)

- Horizontale (centrifuge négligée) :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) u_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f\,u_y + \nu\,\nabla^2 u_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) u_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - f\,u_x + \nu\,\nabla^2 u_y$$

Terme	Echelle	Atmosphère	Océan
$\frac{\partial}{\partial t} u_x$	$\frac{U^2}{L}$	10^{-4}	10^{-8}
$\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) u_x$	$\frac{U^2}{L}$	10^{-4}	10^{-8}
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$	$\frac{\Delta P}{\rho\,L}$	10^{-3}	10^{-5}
$f\,u_y$	$f\,U$	10^{-3}	10^{-5}
$\nu\,\nabla^2 u_x$	$\nu\,\frac{U}{L^2}$	10^{-16}	10^{-19}

Equilibre Géostrophique

- Horizontale :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = f\, u_y$$

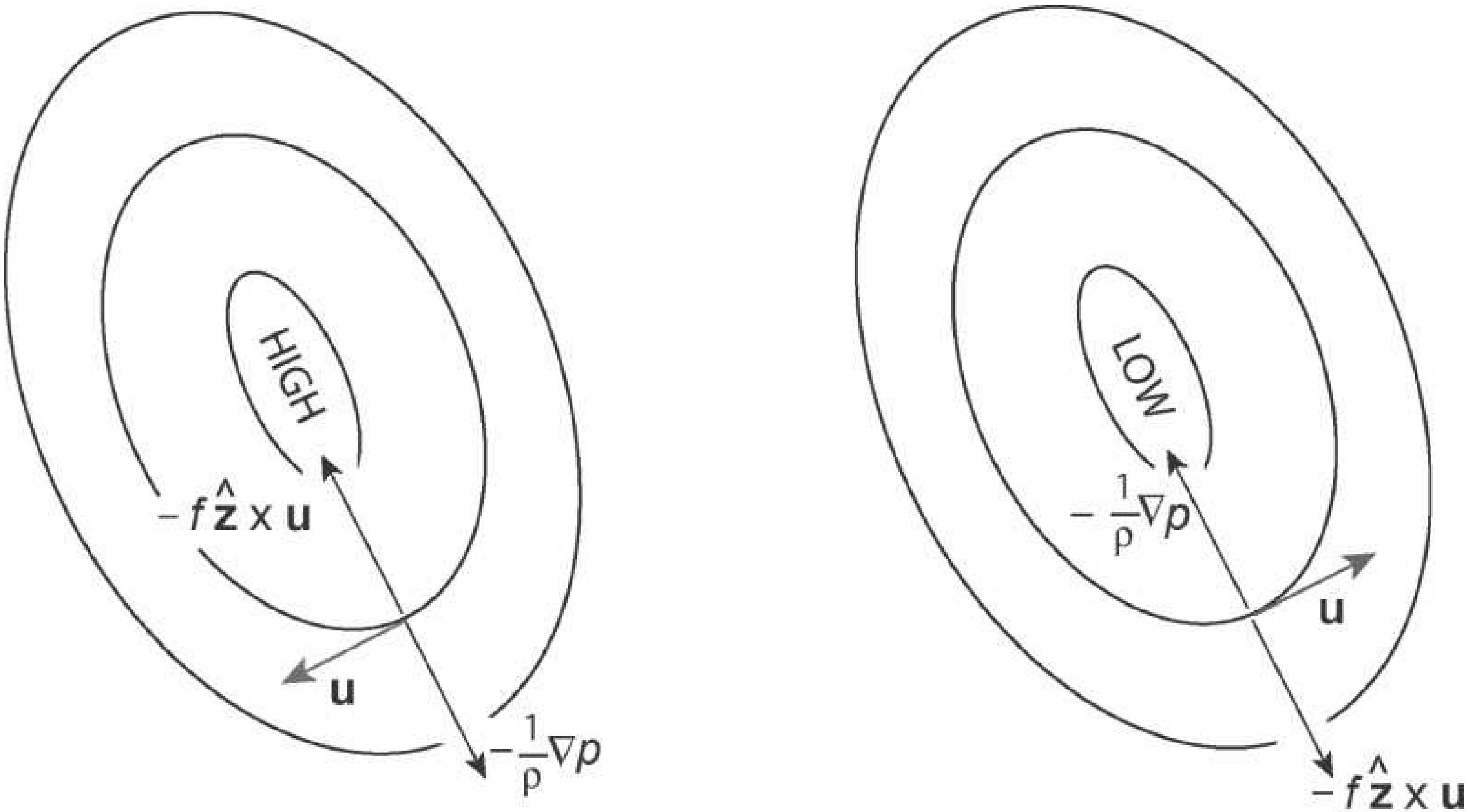
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -f\, u_x$$

ou :

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} P = -f\, \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{u}$$

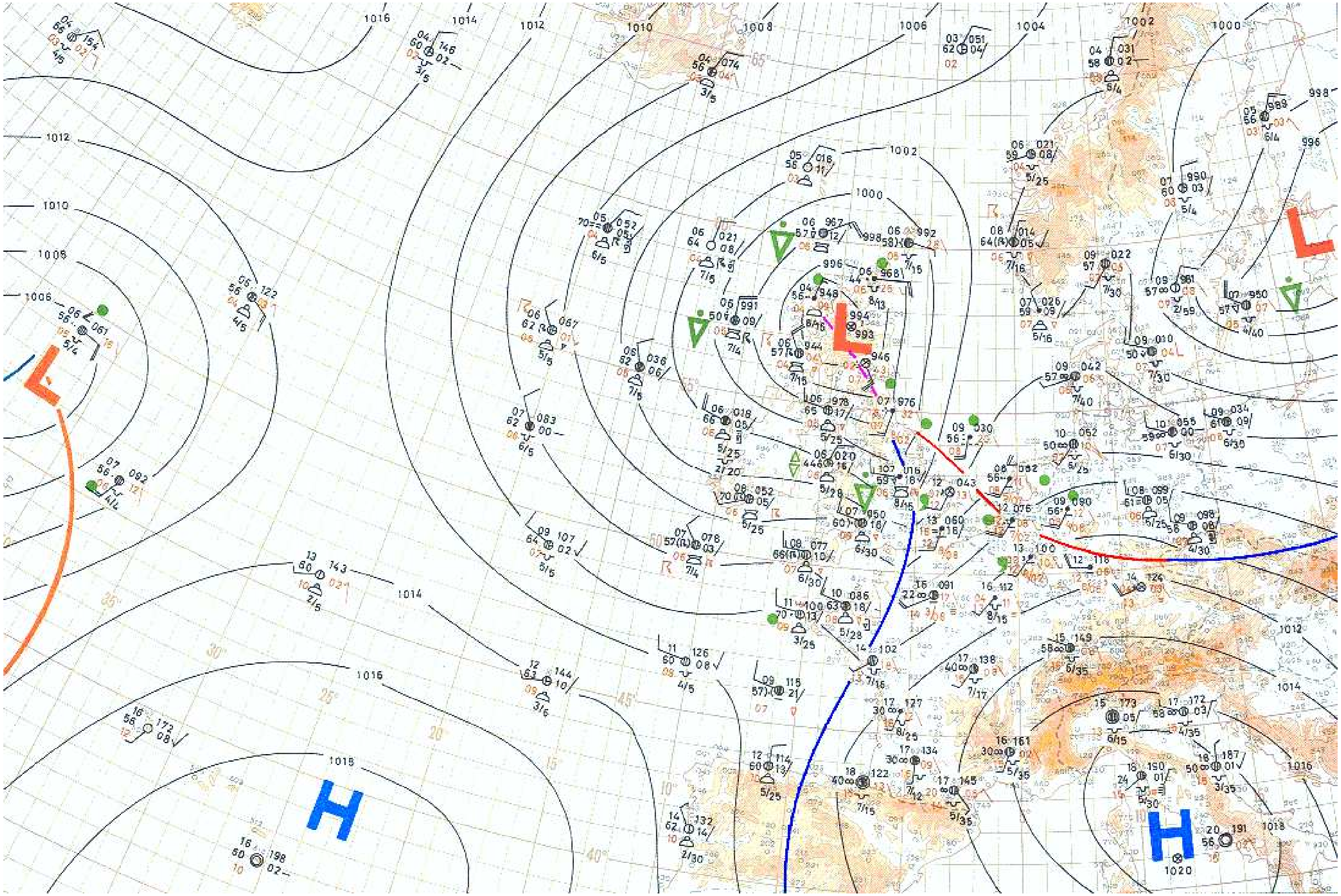
- Ne réduit pas les écarts de pression !
- Evolution : autres termes ($10 \times$ plus faibles $\Rightarrow$ plus lents).

Equilibre Géostrophique



(© Ulrich Platt)

Carte Météo



Nombres sans dimension

- Froude (Inertie sur gravité) :

$$Fr = \frac{\left| \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u} \right|}{g} \sim \frac{U^2}{L\, g}$$

- Euler (Inertie sur gradient de pression) :

$$Eu = \frac{\left| \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u} \right|}{\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P} \sim \frac{\rho\, U^2}{\Delta P}$$

- Rossby (Inertie sur Coriolis) :

$$Ro = \frac{\left| \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u} \right|}{2\, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\Omega}} \sim \frac{U}{f\, L}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Pour un écoulement potentiel :

- Il existe ϕ tel que :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi$$

- Bernouilli :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho} = f(t)$$

- Ecoulement initial uniforme et stationnaire :

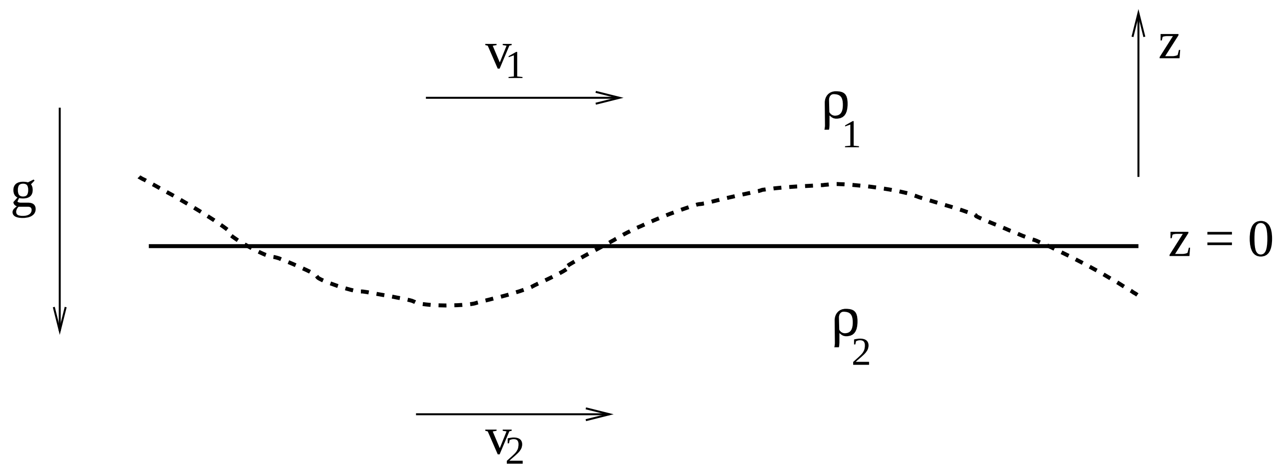
$$f(t) = 0$$

- Champ de pesanteur uniforme :

$$\Psi = \rho\, g\, z$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Instabilité de cisaillement.



Au premier ordre :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{P}{\rho} + g\, z = 0$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Perturbation de vitesse :

$$\overrightarrow{u_i} = v_i \overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{\nabla} \phi_i$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Perturbation de vitesse :

$$\overrightarrow{u_i} = v_i \overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{\nabla}\phi_i$$

ϕ_i Solution d'une équation de Laplace, et 0 à ∞ :

$$\phi_1 = C_1 \exp\left(-i\omega t + ikx - kz\right)$$

$$\phi_2 = C_2 \exp\left(-i\omega t + ikx + kz\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Perturbation de l'interface :

$$z = \zeta(x) = A \exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Perturbation de vitesse :

$$\overrightarrow{u_i} = v_i \overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{\nabla} \phi_i$$

ϕ_i Solution d'une équation de Laplace, et 0 à ∞ :

$$\phi_1 = C_1 \exp\left(-i\omega t + ikx - kz\right)$$

$$\phi_2 = C_2 \exp\left(-i\omega t + ikx + kz\right)$$

Condition à l'interface (suivant z) :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \, ; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On évalue au premier ordre, en $z = 0$ (après simplification de $\exp\left(-i\omega t + ikx\right)$.

$$k\,C_1 = A\ \left(i\omega - ik\,v_1\right)\ ; \quad k\,C_2 = -A\ \left(i\omega - ik\,v_2\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On évalue au premier ordre, en $z = 0$
(après simplification de $\exp\left(-i\omega t + ikx\right)$.

$$k\,C_1 = A\,\left(i\omega - ik\,v_1\right)\;;\quad k\,C_2 = -A\,\left(i\omega - ik\,v_2\right)$$

Continuité de la pression :

$$\rho_1\,\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_1\,\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + g\zeta\right) = \rho_2\,\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_2\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + g\zeta\right)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

On évalue au premier ordre, en $z = 0$
(après simplification de $\exp\left(-i\omega t + ikx\right)$.

$$k\,C_1 = A\ (i\omega - ik\,v_1)\ ; \quad k\,C_2 = -A\ (i\omega - ik\,v_2)$$

Continuité de la pression :

$$\rho_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_1\,\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + g\zeta\right) = \rho_2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\,v_2\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + g\zeta\right)$$

En $z = 0$:

$$\rho_1\ (-i\omega\,C_1 + ik\,v_1\,C_1 + g A) = \rho_2\ (-i\omega\,C_2 + ik\,v_2\,C_2 + g A)$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

En substituant :

$$(\omega - k\bar{v})^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)\; gk}{(\rho_1 + \rho_2)} - \frac{\rho_1 \rho_2\; (v_1 - v_2)^2\; k^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$$

Avec :

$$\bar{v} = \frac{(\rho_1 \, v_1 + \rho_2 \, v_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

En substituant :

$$(\omega - k\bar{v})^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)\ gk}{(\rho_1 + \rho_2)} - \frac{\rho_1 \rho_2\ (v_1 - v_2)^2\ k^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$$

Avec :

$$\bar{v} = \frac{(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}$$

- Instable si $RHS < 0$.
  - 1er terme : stratification (stabilise)
  - 2ème terme : cisaillement (déstabilise)
- Si $v_1 = v_2 \Rightarrow$ Instabilité de Rayleigh-Taylor
- Petites échelles toujours instables.
- Condition suffisantes (perturbation irrotationnelle).

Rayleigh-Taylor

Récréation : simulation de flamme thermonucléaire dans une supernova :

- $1.5\,10^7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$: `https://www.youtube.com/watch?v=ddNOBDmr7s4`
- $1.0\,10^7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$: `https://www.youtube.com/watch?v=n8DZdtKugbY`
- $6.7\,10^6\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$: `https://www.youtube.com/watch?v=2n7mOrSqRkA`

Reference :`http://www.astro.sunysb.edu/mzingale` "Direct Numerical Simulations of Type Ia Supernovae Flames II : The Rayleigh-Taylor Instability", Bell, J. B., et al. 2004, ApJ, 608, 883