

Hydrodynamique et Turbulence

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

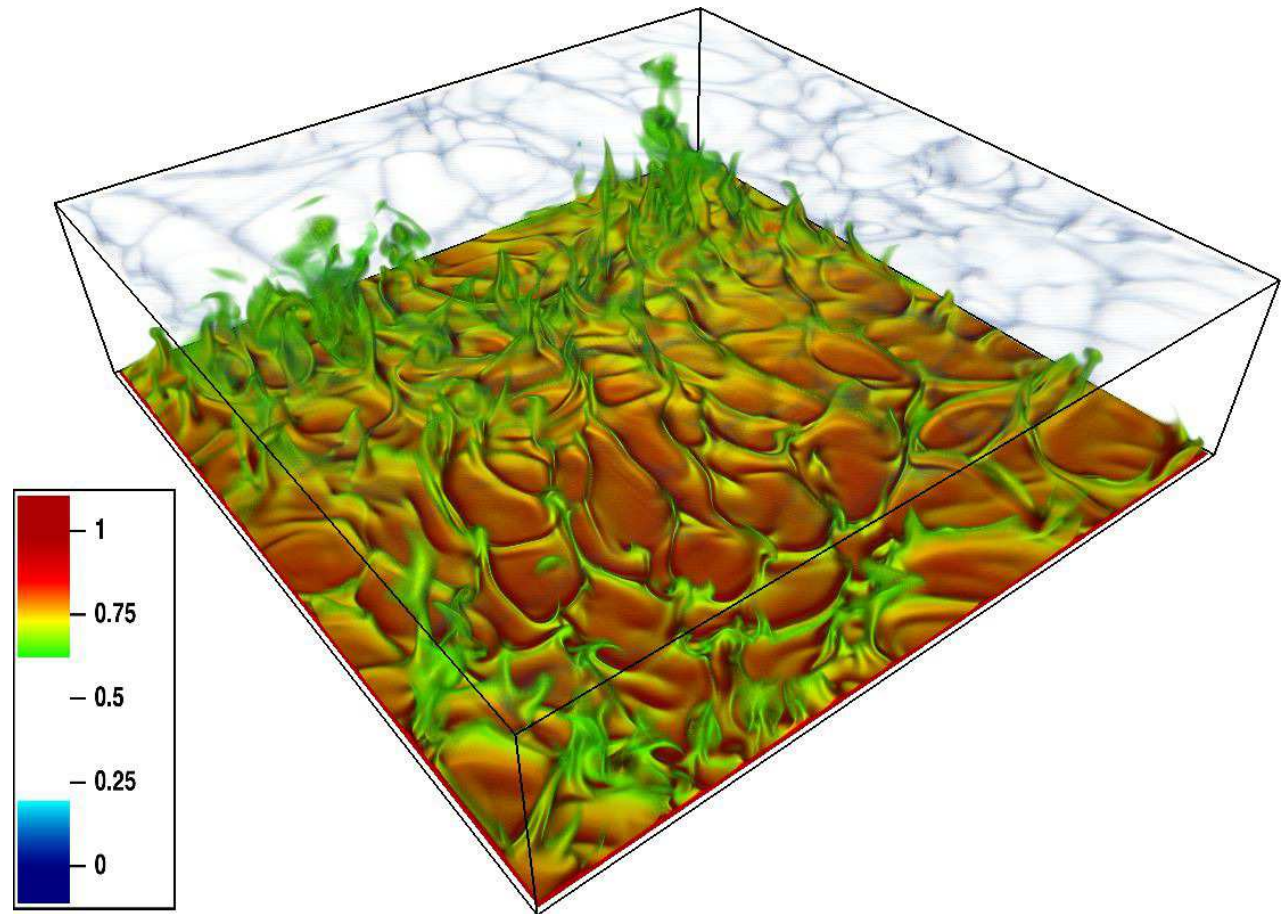
Octobre 2014

Résolution numérique

Résolution numérique

- ❖ Méthodes
- ❖ DNS
- ❖ AMR
- ❖ SPH
- ❖ PDF

Analyse Numérique



Garaud et al. (2010)

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.
- Éléments finis :
 - ◆ Formulation variationnelle.

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.
- Éléments finis :
 - ◆ Formulation variationnelle.
- Volumes finis :
 - ◆ Equations de conservation.

Méthodes

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- Différences finies :
 - ◆ Approximation de dérivées par des rapports de différences.
- Éléments finis :
 - ◆ Formulation variationnelle.
- Volumes finis :
 - ◆ Equations de conservation.
- Méthodes spectrales :
 - ◆ Développement sur une base.

Direct Numerical Simulation

Résolution
numérique

❖ Méthodes

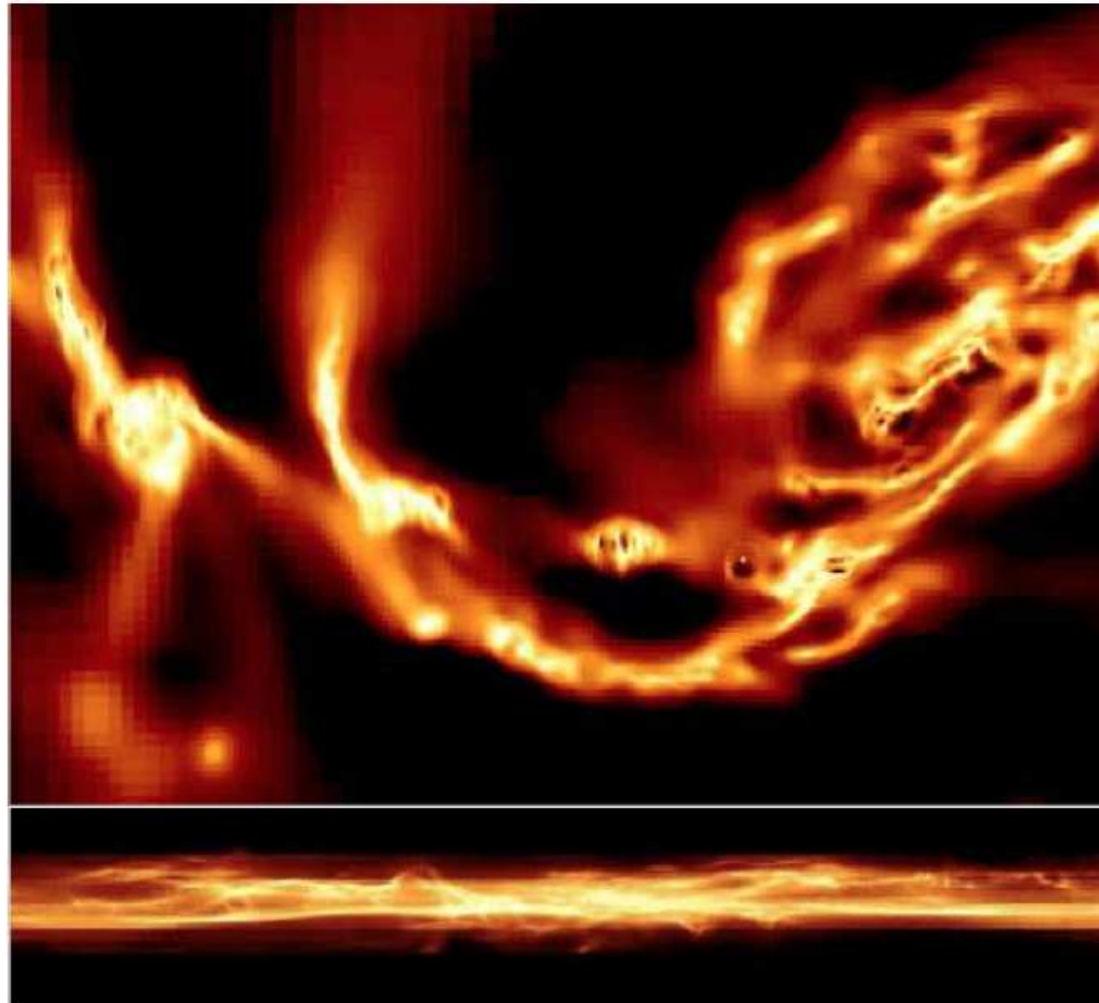
❖ **DNS**

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique



Bournaud et al. (2010)

Coût

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ **DNS**

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- “DNS” (Direct Numerical Simulation)

$$n \sim \frac{L_{box}}{L} \frac{L}{\eta} = \frac{L_{box}}{L} (R_L)^{3/4}$$

$$N_x = n^3 \propto \left(\frac{L_{box}}{L} \right)^3 (R_L)^{9/4}$$

Coût

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- “DNS” (Direct Numerical Simulation)

$$n \sim \frac{L_{box}}{L} \frac{L}{\eta} = \frac{L_{box}}{L} (R_L)^{3/4}$$

$$N_x = n^3 \propto \left(\frac{L_{box}}{L} \right)^3 (R_L)^{9/4}$$

- Donc, avec $\frac{L_{box}}{L} \simeq 3$:
 - ◆ $R_L \sim 10^4$ nécessite 10^{10} points !
 - ◆ 1024 points représente $R_\lambda \sim 10^2$ seulement.

Coût

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- Pas de temps maxi : $\Delta t \sim \frac{\eta}{u} \sim \frac{L}{u} R_L^{-3/4}$:

$$N_t \sim \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{T}{L/u} R_L^{3/4}$$

Coût

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ **DNS**

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- Pas de temps maxi : $\Delta t \sim \frac{\eta}{u} \sim \frac{L}{u} R_L^{-3/4}$:

$$N_t \sim \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{T}{L/u} R_L^{3/4}$$

- Temps de calcul :

$$t_{CPU} \propto N_x N_t \sim \left(\frac{T}{L/u} \right) \left(\frac{L_{box}}{L} \right)^3 R_L^3$$

Coût

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

Table 7.1 Estimated computer run times for (i) a gigaflop computer and (ii) a teraflop computer, based on equation (7.4)

<i>Gigaflop computer</i>	$Re = 100$	$Re = 500$	$Re = 1000$	$Re = 5000$
$L_{BOX}(l)$	$R_\lambda = 39$	$R_\lambda = 87$	$R_\lambda = 122$	$R_\lambda = 274$
10	2 h	9 days	2 months	24 years
20	1 day	2 months	2 years	2 centuries
50	9 days	3 years	24 years	A long time
100	2 months	24 years	2 centuries	A very long time
<i>Teraflop computer</i>	$Re = 1000$	$Re = 5000$	$Re = 10,000$	$Re = 50,000$
$L_{BOX}(l)$	$R_\lambda = 122$	$R_\lambda = 274$	$R_\lambda = 386$	$R_\lambda = 866$
10	2 h	9 days	2 months	24 years
20	1 day	2 months	2 years	2 centuries
50	9 days	3 years	24 years	A long time
100	2 months	24 years	2 centuries	A very long time

Coût

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- 2014 TOP500 :
 - ◆ 1 : Tianhe-2 : 33.86 Pflops (= 10^6 Gflops = 10^3 Tflops)
 - ◆ 10 : Cray XC30 : 3.144 Pflops
- Coût du Gflops (Wikipedia
en.wikipedia.org/wiki/FLOPS :
 - ◆ 1961 : $8.3 \cdot 10^9$ \$
 - ◆ 1984 : $4.3 \cdot 10^7$ \$
 - ◆ 1997 : $4.2 \cdot 10^4$ \$
 - ◆ 2003 : $1.0 \cdot 10^2$ \$
 - ◆ 2011 : $1.8 \cdot 10^0$ \$ (mars)
 - ◆ 2013 : $1.2 \cdot 10^{-1}$ \$ (décembre)

Adaptive Mesh Refinement

Résolution
numérique

❖ Méthodes

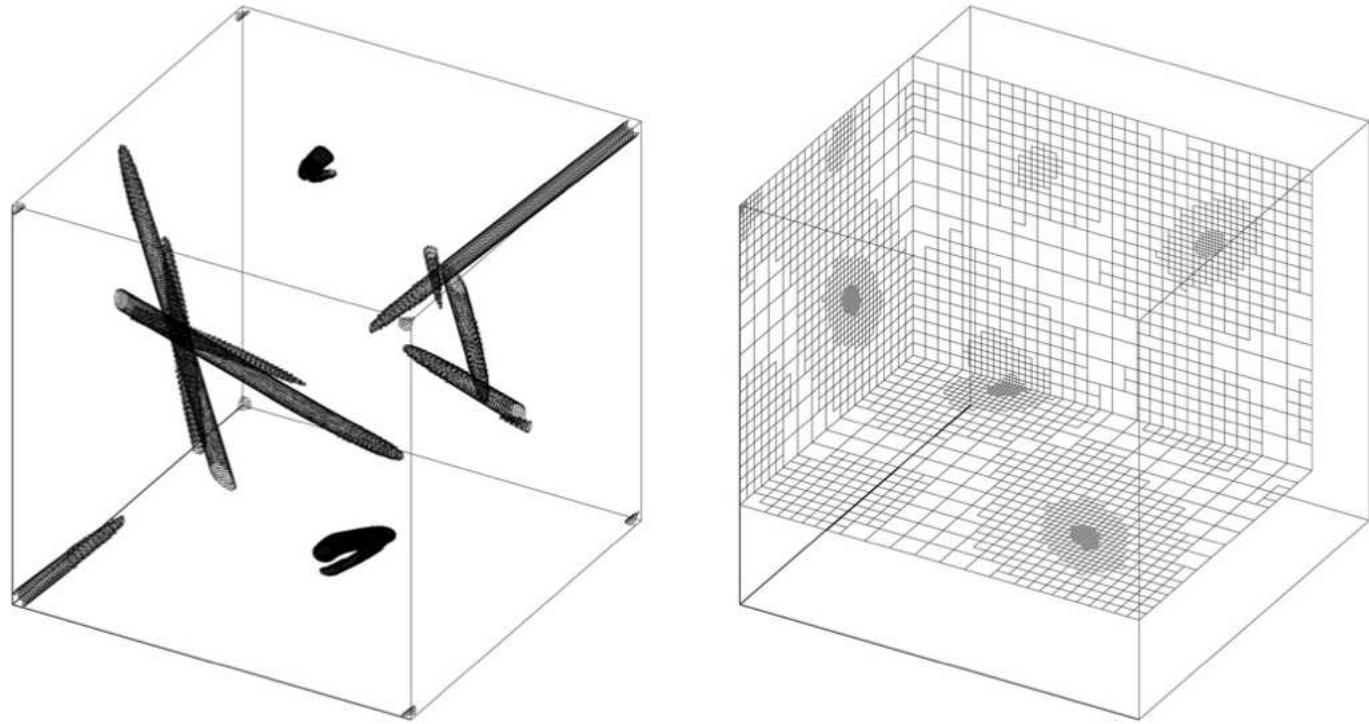
❖ DNS

❖ **AMR**

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique



Tessier (2007)

Adaptive Mesh Refinement

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

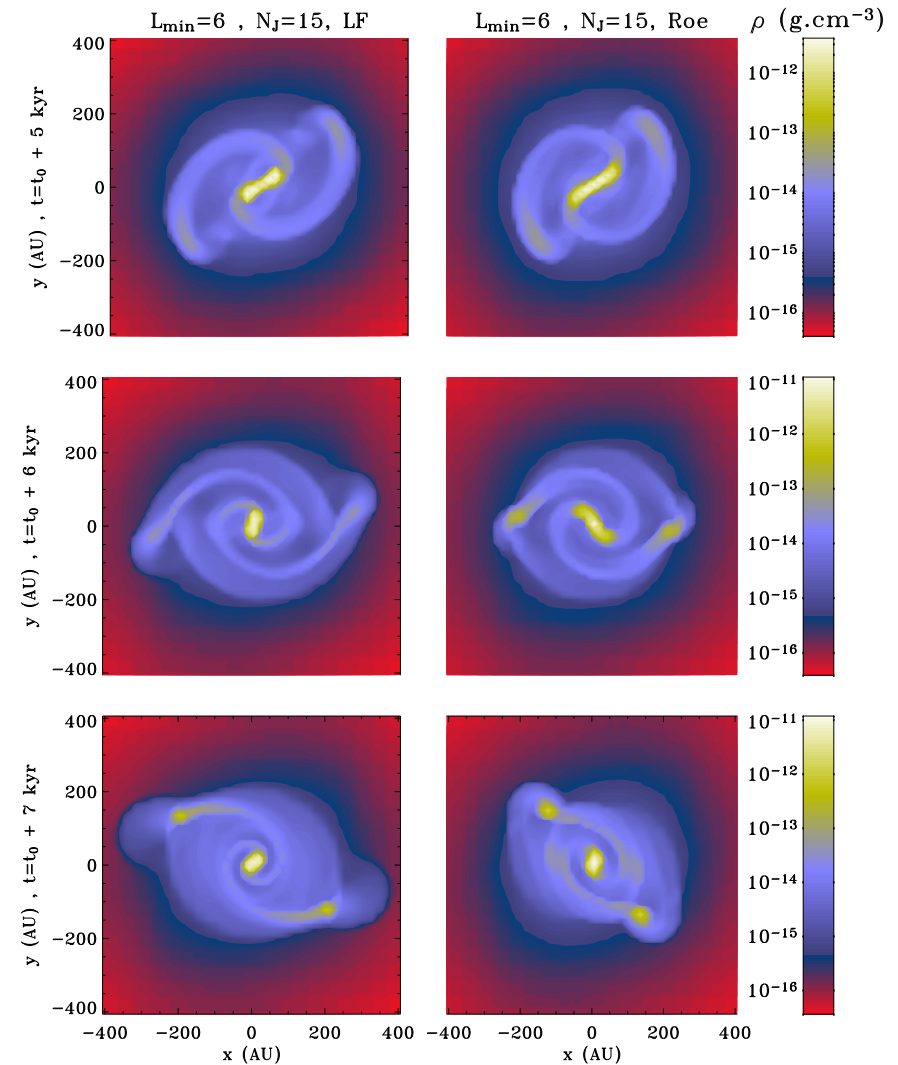
❖ PDF

Analyse Numérique

Un exemple :

- RAMSES (AMR) vs.
- DRAGON (SPH)

Commerçon et al., A&A
(2008)



SPH

Résolution
numérique

❖ Méthodes

❖ DNS

❖ AMR

❖ SPH

❖ PDF

Analyse Numérique

- “Smooth Particles Hydrodynamics”
- Méthode Lagrangienne (résolution adaptative)
- Propriétés moyennées par un “Kernel” (noyau) de taille h .
- Bien adapté pour “capturer” les chocs (écoulements supersoniques)
- Facile d’ajouter la gravité.

Comparaison AMR vs. SPH : Kitsionas et al. (2009) :

AMR	SPH
ENZO, FLASH, TVD, ZEUS	GADGET, PHANTOM, VINE

- Equation pour la PDF des vitesses (f_U).
- Equation Différentielle Stochastique (Equation de Langevin) pour les *fluctuations* de vitesse.

$$dU(t) = -U(t) \frac{dt}{T_L} + \left(\frac{2\sigma^2}{T_L} \right)^{1/2} dW(t)$$

- f_U solution de l'équation de Fokker-Planck associée.

$$\frac{\partial f_U}{\partial t} = \frac{1}{T_L} \frac{\partial}{\partial x} (U f_U) + \frac{\sigma^2}{T_L} \frac{\partial^2 f_U}{\partial x^2}$$

Avantages :

- Grande souplesse.
- Nombreuses extensions possibles.
- Possibilité d'incorporer simplement des flots réactifs.

Crank-Nicholson

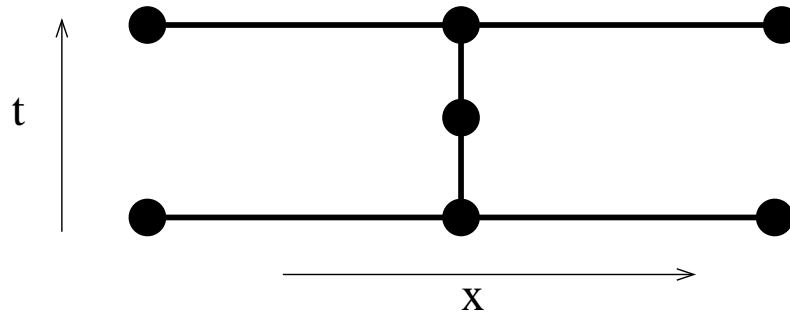
Résolution
numérique

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

Adaptée à la diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C + F(C)$$



Crank-Nicholson

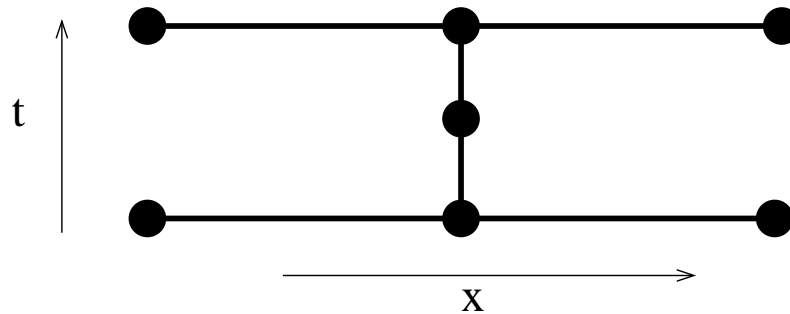
Résolution
numérique

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

Adaptée à la diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C + F(C)$$



- Différences finies :
 - ◆ Dérivées seconde en x
 - ◆ Dérivée première en t

Crank-Nicholson

Résolution
numérique

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

Espace :

$$\frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i,j} - C^{i-1,j}}{h} \quad \frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i+1,j} - C^{i,j}}{h}$$

Crank-Nicholson

Espace :

$$\frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i,j} - C^{i-1,j}}{h} \quad \frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i+1,j} - C^{i,j}}{h}$$

$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} - \frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} \right) = \frac{C^{i-1,j} - 2C^{i,j} + C^{i+1,j}}{h^2}$$

Crank-Nicholson

Résolution
numérique

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

Espace :

$$\frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i,j} - C^{i-1,j}}{h} \quad \frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{C^{i+1,j} - C^{i,j}}{h}$$

$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial C^{i+\frac{1}{2}}}{\partial x} - \frac{\partial C^{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} \right) = \frac{C^{i-1,j} - 2C^{i,j} + C^{i+1,j}}{h^2}$$

Temps :

$$\frac{\partial C^{i,j+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{C^{i,j+1} - C^{i,j}}{k}$$

Crank-Nicholson

En $(i, j + \frac{1}{2})$:

$$\frac{C^{i,j+1} - C^{i,j}}{k} = F(C)$$
$$+ \frac{D}{2} \left[\frac{C^{i-1,j+1} - 2C^{i,j+1} + C^{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{C^{i-1,j} - 2C^{i,j} + C^{i+1,j}}{h^2} \right]$$

Crank-Nicholson

En $(i, j + \frac{1}{2})$:

$$\frac{C^{i,j+1} - C^{i,j}}{k} = F(C)$$

$$+ \frac{D}{2} \left[\frac{C^{i-1,j+1} - 2C^{i,j+1} + C^{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{C^{i-1,j} - 2C^{i,j} + C^{i+1,j}}{h^2} \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned} & -r C^{i-1,j+1} + (1 + 2r) C^{i,j+1} - r C^{i+1,j+1} \\ & = k F(C^{i,j}) + r C^{i-1,j} + (1 - 2r) C^{i,j} + r C^{i+1,j} \end{aligned}$$

$$r = \frac{k D}{2 h^2} < \frac{1}{2}$$

Crank-Nicholson

Résolution
numérique

Analyse Numérique

❖ Crank-Nicholson

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 + 2r & -r & 0 & 0 & -r \\ -r & 1 + 2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 + 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ \vdots \\ C^n \end{pmatrix}^{j+1} \\
 = & k \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 2r & r & 0 & 0 & r \\ r & 1 - 2r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 - 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ \vdots \\ C^n \end{pmatrix}^j
 \end{aligned}$$