# Hydrodynamique et Turbulence - IV

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

30 Septembre 2015

# Réaction diffusion 1D



Equation de réaction diffusion (à une composante) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F(C) + D\,\Delta C$$

- $F$ : Terme source (thermo-chimiques en général).
- $D$ : Couplage diffusif.

# Réaction diffusion 1D



Equation de réaction diffusion (à une composante) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F(C) + D\,\Delta C$$

- $F$ : Terme source (thermo-chimiques en général).
- $D$ : Couplage diffusif.

On étudie au voisinage d'un état stationnaire uniforme.
Soit $\bar{C}$ une solution stationnaire uniforme (i.e. solution de $F(C) = 0$). On pose :

$$c = C - \bar{C}$$

$$f = \left.\frac{\partial F}{\partial c}\right|_{c=0}$$

$$\dot{c} = f\,c + D\,\Delta c$$

# Une variable : Séparation



On pose :

$$c(x,t) = \phi(t)\,U(x)$$

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} - f\right) = \frac{1}{U(x)}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

# Une variable : Séparation



On pose :

$$c(x,t) = \phi(t)\,U(x)$$

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\dot\phi(t)}{\phi(t)} - f\right) = \frac{1}{U(x)}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$\Rightarrow$ Expressions constantes ($= -k^2$) !

$$\dot\phi(t) = \left(f - k^2\,D\right)\,\phi(t)$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + k^2\,U(x) = 0$$

- Spatialement : équation harmonique : $U_k(x) = A\,\cos kx$
- Dépend des conditions aux limites.

# Une variable : Solution



Pour un domaine de taille $L$ les conditions aux limites périodiques sont :

$$U_k(0) = U_k(L) \Rightarrow \cos kL = 1$$

$$\frac{\partial U_k(0)}{\partial x} = \frac{\partial U_k(L)}{\partial x} \Rightarrow \sin kL = 0$$

$$k_n = n\,\frac{2\pi}{L}$$

# Une variable : Solution



Pour un domaine de taille $L$ les conditions aux limites périodiques sont :

$$U_k(0) = U_k(L) \Rightarrow \cos kL = 1$$

$$\frac{\partial U_k(0)}{\partial x} = \frac{\partial U_k(L)}{\partial x} \Rightarrow \sin kL = 0$$

$$k_n = n\,\frac{2\pi}{L}$$

Soit :

$$c(x,t) = \sum_k a_k(t)\, U_k(x)$$

- Les $U_k(x)$ forment une base.
- Les $a_k(t)$ sont les amplitudes des différents modes spatiaux. $a_0 = 0$ (C.I.)

# *Une variable : Solution*



L'équation de $\phi(t)$ donne :

$$a_k(t) \propto \exp\left(f - k^2\, D\right)\, t$$

Contribution croissante (i.e. instable) si :

$$f - k^2\, D > 0$$

# Une variable : Solution



L'équation de $\phi(t)$ donne :

$$a_k(t) \propto \exp\left(f - k^2\, D\right)\, t$$

Contribution croissante (i.e. instable) si :

$$f - k^2\, D > 0$$

Terme le plus instable : $n = 1$. Donc, instable si :

$$L > 2\pi\sqrt{\frac{D}{f}}$$

Il y a une longueur critique qui dépend de la dynamique locale (via $f$) et du couplage spatiale (via $D$).

# Deux variables



$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = f_1(C_1, C_2) + D_1\,\Delta C_1$$
$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = f_2(C_1, C_2) + D_2\,\Delta C_2$$

- $f_1$, $f_2$ : Termes source (thermo-chimiques en général)
- $D_1$, $D_2$ : Couplage diffusif (Éventuellement différents)

# Deux variables



$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = f_1(C_1, C_2) + D_1 \, \Delta C_1$$
$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = f_2(C_1, C_2) + D_2 \, \Delta C_2$$

- $f_1$, $f_2$ : Termes source (thermo-chimiques en général)
- $D_1$, $D_2$ : Couplage diffusif (Éventuellement différents)

Deux études possibles :

- Au voisinage d'un état stationnaire uniforme $\Rightarrow$ Semi-analytique.
- En régime non-linéaire développé $\Rightarrow$ Numérique.
- On cherche à développer les solutions sur la même base spatiale des $U_k(x)$.

# Linéarisation



Soit $\bar{C}_i$ une solution stationnaire uniforme (i.e. solution de $f_i(C_1, C_2) = 0$). On pose :

$$c_i = C_i - \bar{C}_i$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial c_j}$$

$$\dot{c}_1 = f_{11}\, c_1 + f_{12}\, c_2 + D_1\, \Delta c_1$$

$$\dot{c}_2 = f_{21}\, c_1 + f_{22}\, c_2 + D_2\, \Delta c_2$$

# Linéarisation



Soit $\bar{C}_i$ une solution stationnaire uniforme (i.e. solution de $f_i(C_1, C_2) = 0$). On pose :

$$c_i = C_i - \bar{C}_i$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial c_j}$$

$$\dot{c}_1 = f_{11}\, c_1 + f_{12}\, c_2 + D_1\, \Delta c_1$$

$$\dot{c}_2 = f_{21}\, c_1 + f_{22}\, c_2 + D_2\, \Delta c_2$$

Au voisinage de cet état stationnaire, on cherche une solution à variables séparées (en $x$ et en $t$).

$$c_i(x,t) = \sum_k a_{ik}(t)\, U_k(x)$$

# Solution



$$\sum_k \dot{a}_{1k}(t)\, U_k = f_{11} \sum_k a_{1k}\, U_k + f_{12} \sum_k a_{2k}\, U_k - D_1 \sum_k a_{1k}\, k^2\, U_k$$

$$\sum_k \dot{a}_{2k}(t)\, U_k = f_{21} \sum_k a_{1k}\, U_k + f_{22} \sum_k a_{2k}\, U_k - D_2 \sum_k a_{2k}\, k^2\, U_k$$

# Solution



$$\sum_k \dot{a}_{1k}(t)\,U_k = f_{11}\sum_k a_{1k}\,U_k + f_{12}\sum_k a_{2k}\,U_k - D_1\sum_k a_{1k}\,k^2\,U_k$$

$$\sum_k \dot{a}_{2k}(t)\,U_k = f_{21}\sum_k a_{1k}\,U_k + f_{22}\sum_k a_{2k}\,U_k - D_2\sum_k a_{2k}\,k^2\,U_k$$

Les $U_k(x)$ sont indépendants, donc pour chaque $k$ on doit avoir :

$$\dot{a}_{1k}(t) = \left(f_{11} - D_1\,k^2\right)\,a_{1k} + f_{12}\,a_{2k}$$

$$\dot{a}_{2k}(t) = f_{21}\,a_{1k} + \left(f_{22} - D_2\,k^2\right)\,a_{2k}$$

Système linéaire. Les $a_{ik}(t)$ s'ammortissent si les valeurs propres de la matrice du système ont des parties réelles négatives.

# Équation de dispersion



Equation caractéristique :

$$\left(f_{11} - D_1\, k^2 - \lambda\right)\, \left(f_{22} - D_2\, k^2 - \lambda\right) - f_{12}\, f_{21} = 0$$

ou bien (avec $Tr = f_{11} + f_{22}$ et $Dt = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}$ :

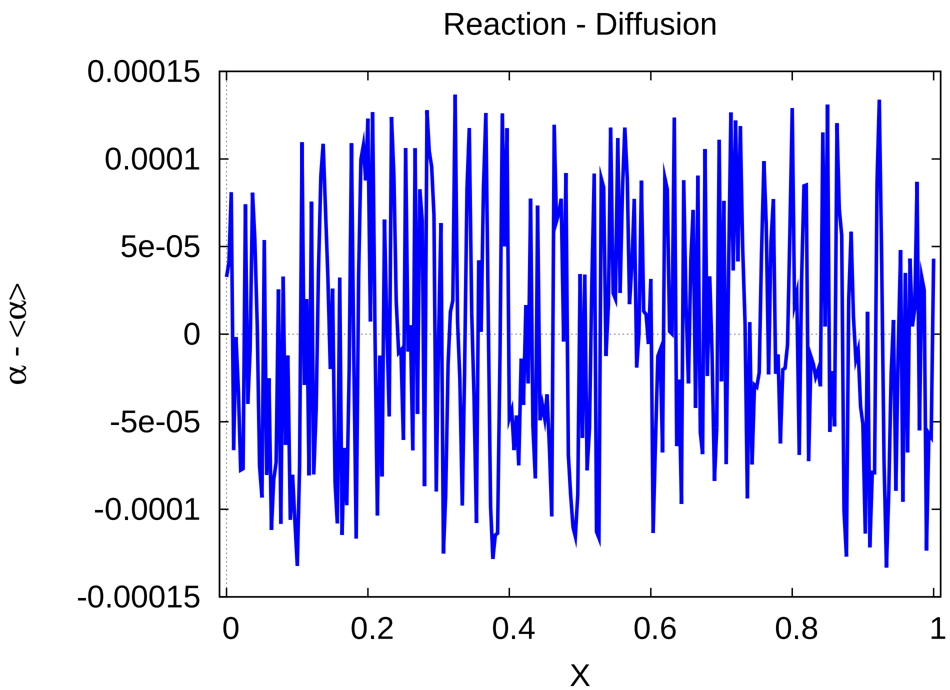
$$\lambda^2 + \lambda\, \left[k^2\, (D_1 + D_2) - Tr\right]$$

$$+ k^2\, \left(D_1 D_2 k^2 - f_{11} D_2 - f_{22} D_1\right) + Dt = 0$$

- Tous les modes tels que $\Re\left(\lambda(k)\right) < 0$ s'amortissent.
- Le mode observé est le $\sup \lambda(k) > 0$
- Valable seulement près de l'état stationnaire uniforme !

# Exemple

- On part de l'état stationnaire instable.
- On impose une perturbation aléatoire faible.

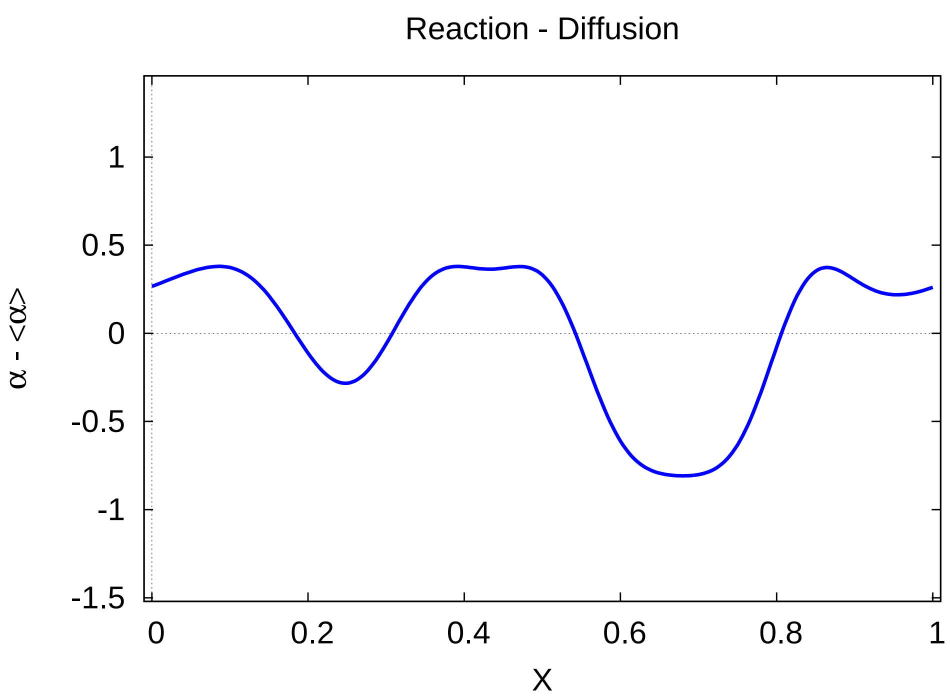



Voir animation

# Exemple



- On laisse évoluer quelques temps.
- L'oscillation se développe et la diffusion "lisse" le front.




Voir animation