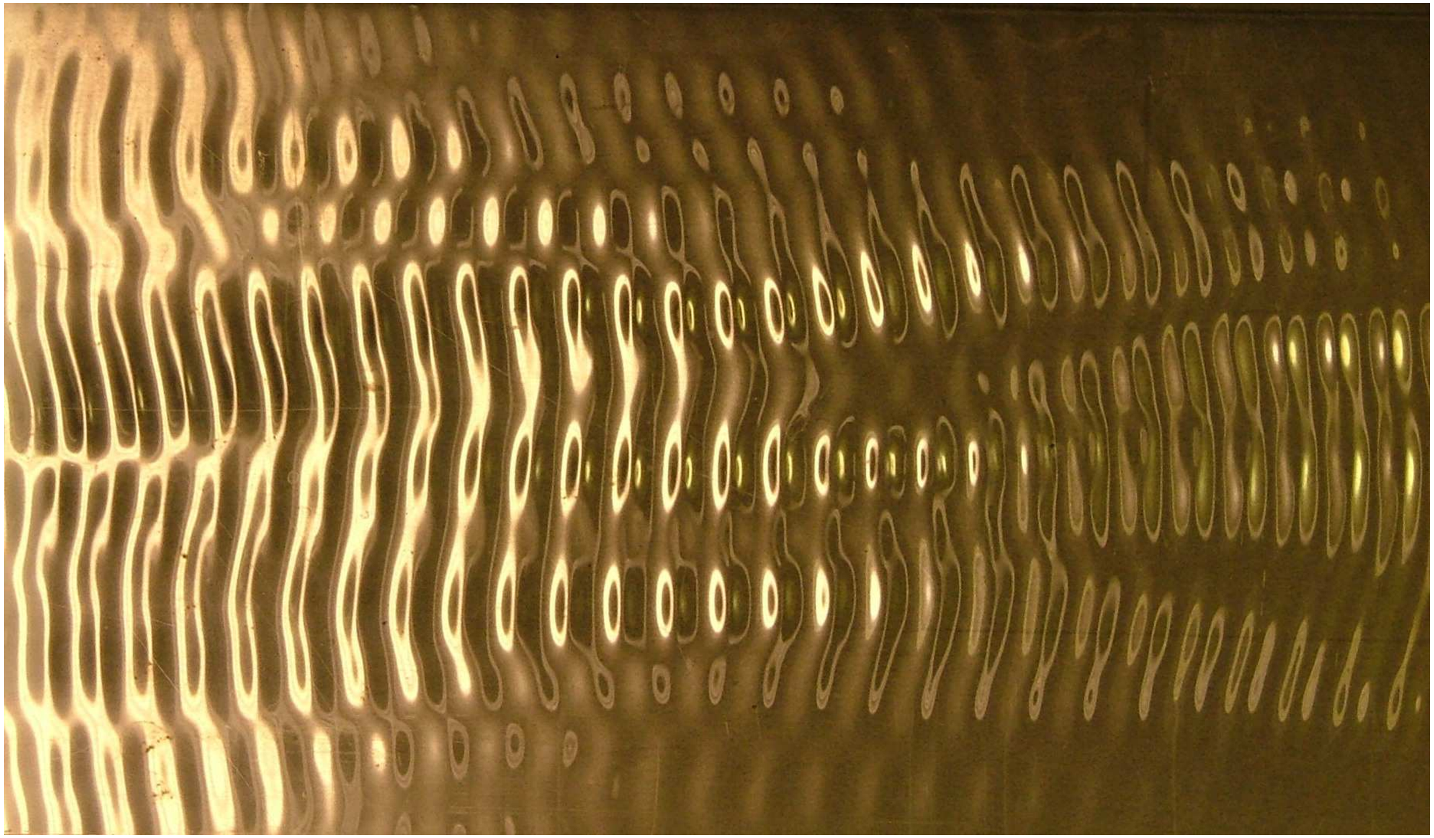
Hydrodynamique et Turbulence - V

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

28 Septembre 2015

Ondes Sonores



www.cite-acoustique.fr/m1r1_notions2.php

Thermodynamique

- Fluide parfait, non visqueux, sans force en volume.
- Perturbation isentropique ($\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$) :

$$P\,\rho^{-\gamma} = Cte$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \gamma\,\frac{P}{\rho}$$

Thermodynamique

- Fluide parfait, non visqueux, sans force en volume.
- Perturbation isentropique ($\gamma = \frac{c_P}{c_V}$) :

$$P\,\rho^{-\gamma} = Cte$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \gamma\,\frac{P}{\rho}$$

- Navier-Stokes (sans dissipation) :

$$\frac{\partial \rho\, u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, u_i\, u_j}{\partial x_j} = -\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Perturbation

On pose :

$$\rho = \rho^0 + \rho^1$$

$$u_i = u_i^0 + u_i^1$$

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^1\, u_i^0 + \rho^0\, u_i^1\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^0\, u_i^0\, u_j^1 + \rho^1\, u_i^0\, u_j^0 + \rho^0\, u_i^1\, u_j^0\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^0 + \rho^1\right)$$

Perturbation

On pose :

$$\rho = \rho^0 + \rho^1$$

$$u_i = u_i^0 + u_i^1$$

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^1\, u_i^0 + \rho^0\, u_i^1\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^0\, u_i^0\, u_j^1 + \rho^1\, u_i^0\, u_j^0 + \rho^0\, u_i^1\, u_j^0\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^0 + \rho^1\right)$$

Si $u_i^0 = 0$ et $\rho^0 = Cte$:

$$\rho^0\,\frac{\partial u_i^1}{\partial t} = -\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\partial \rho^1}{\partial x_i}$$

Perturbation

Avec (masse) :

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + \rho^0 \frac{\partial u_j^1}{\partial x_j} = 0$$

Perturbation

Avec (masse) :

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + \rho^0 \frac{\partial u_j^1}{\partial x_j} = 0$$

Finalement :

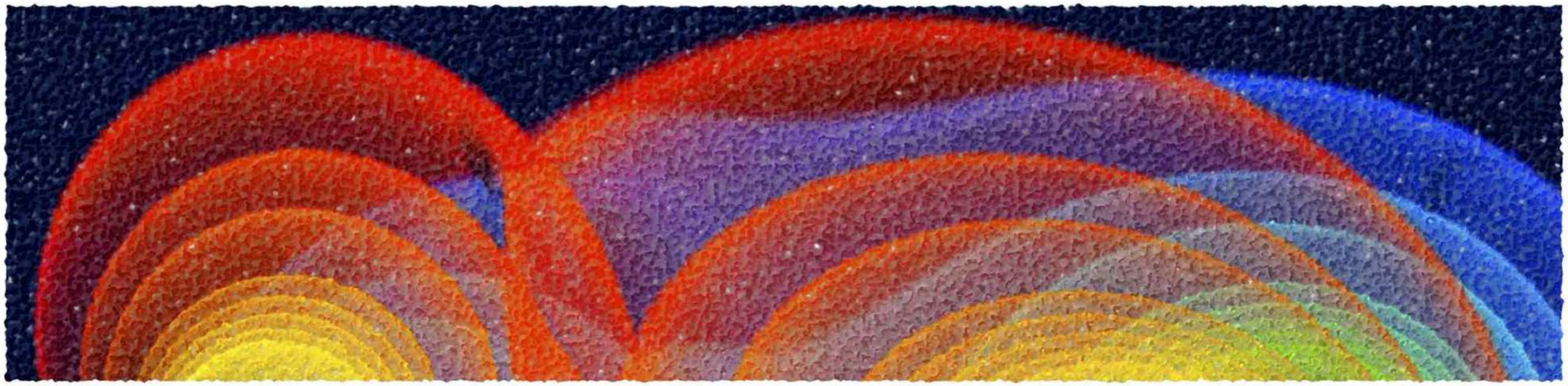
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$$

où (c homogène à une vitesse) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = c^2$$

- c : “vitesse du son”, constante si $T = Cte$.

Méthode des caractéristiques



Adaptées :

- aux EDP du 1er ordre
- aux EDP hyperboliques

Equations du 1er ordre

Soit :

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = C$$

où A, B, C fn de x, t, U.

Equations du 1er ordre

Soit :

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + B\frac{\partial U}{\partial x} = C$$

où A, B, C fn de x, t, U.

- Surface solution :

$$U(x,t) - u = 0$$

- $\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, -1\right)$ normal à la surface
- Donc (A, B, C) est tangent à cette surface.

Equations du 1er ordre

Soit :

$$A\,\frac{\partial U}{\partial t} + B\,\frac{\partial U}{\partial x} = C$$

où A, B, C fn de x, t, U.

- Surface solution :

$$U(x,t) - u = 0$$

- $\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, -1\right)$ normal à la surface
- Donc (A, B, C) est tangent à cette surface.

Donc $ds = (dt, dx, du)$ sur la surface est tel que :

$$\frac{dt}{A} = \frac{dx}{B} = \frac{du}{C}$$

Equations du 1er ordre

- Caractéristiques sur la surface :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A}$$

Equations du 1er ordre

- Caractéristiques sur la surface :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A}$$

- Le long de cette courbe, la solution est :

$$\frac{du}{dt} = \frac{C}{A}$$

Equations du 1er ordre

- Caractéristiques sur la surface :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A}$$

- Le long de cette courbe, la solution est :

$$\frac{du}{dt} = \frac{C}{A}$$

- Conditions initiales : $x(t=0) = x_0$ et $u(t=0) = u_0$

On progresse de proche en proche le long d'une famille de courbes.

Exemple

Euler dans pesanteur et pression uniformes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

- $A = 1$, $B = u$, $C = g$, donc :

$$\frac{dx}{dt} = u\,; \qquad \frac{du}{dt} = g$$

Exemple

Euler dans pesanteur et pression uniformes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

- $A = 1$, $B = u$, $C = g$, donc :

$$\frac{dx}{dt} = u\,; \qquad \frac{du}{dt} = g$$

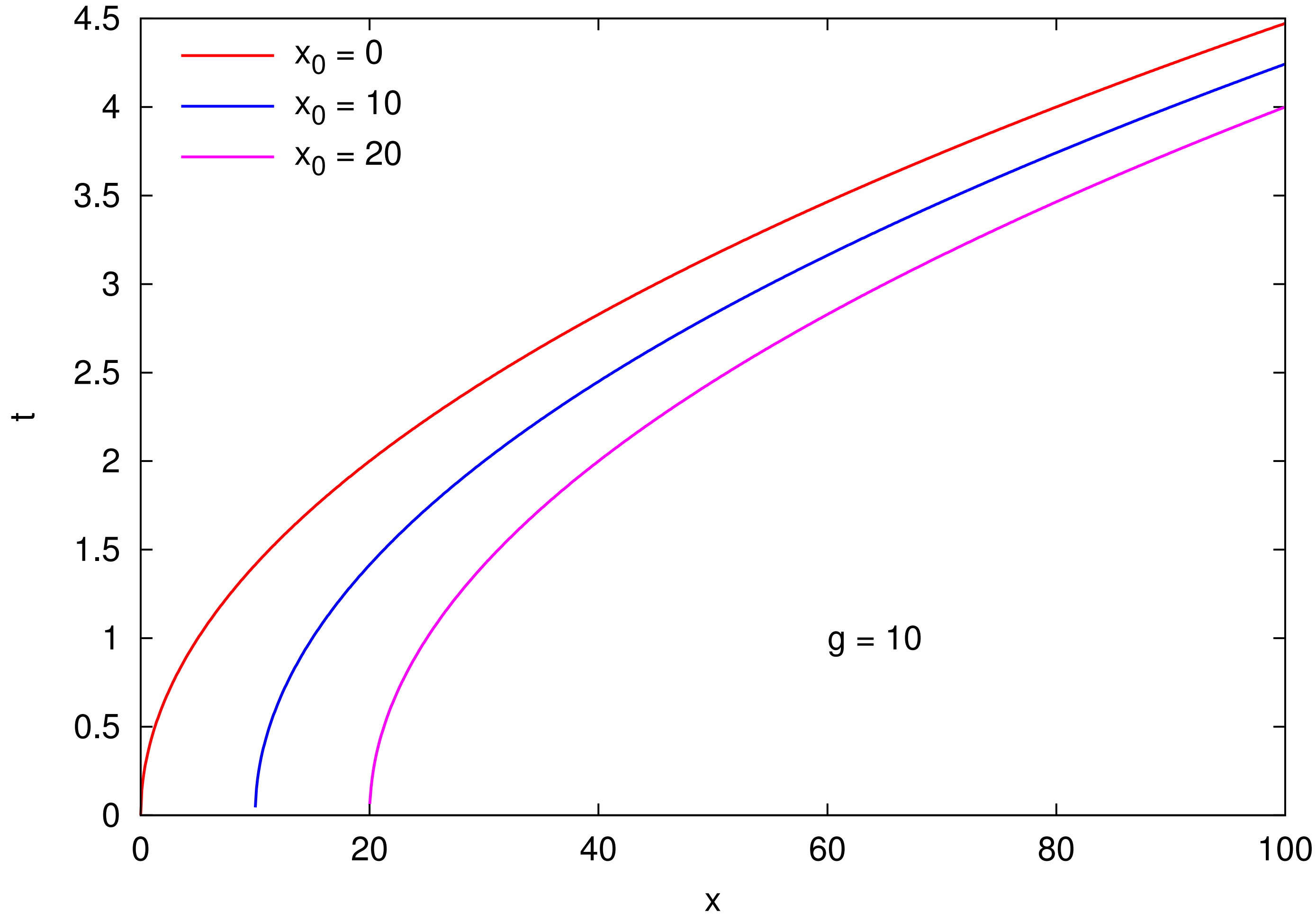
- Solution :

$$u(t) = g\,t + u_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + u_0\,t + x_0$$

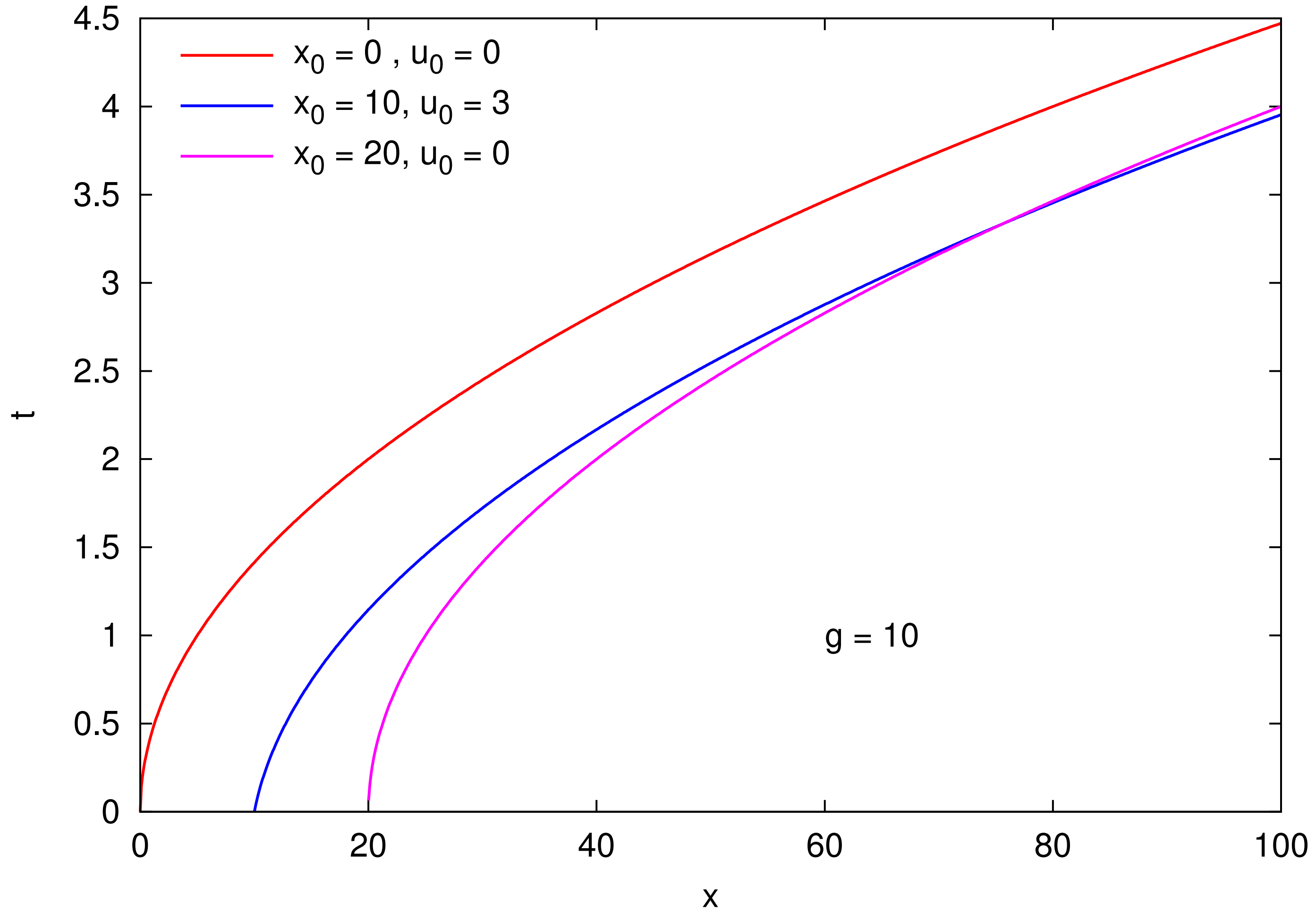
Exemple

Avec $u_0 = 0$ pour tout x :



Exemple

Avec $u_0 = 3$ pour $x_0 = 10$:



Exemple

- Les caractéristiques se croisent
- L'équation n'est plus physique

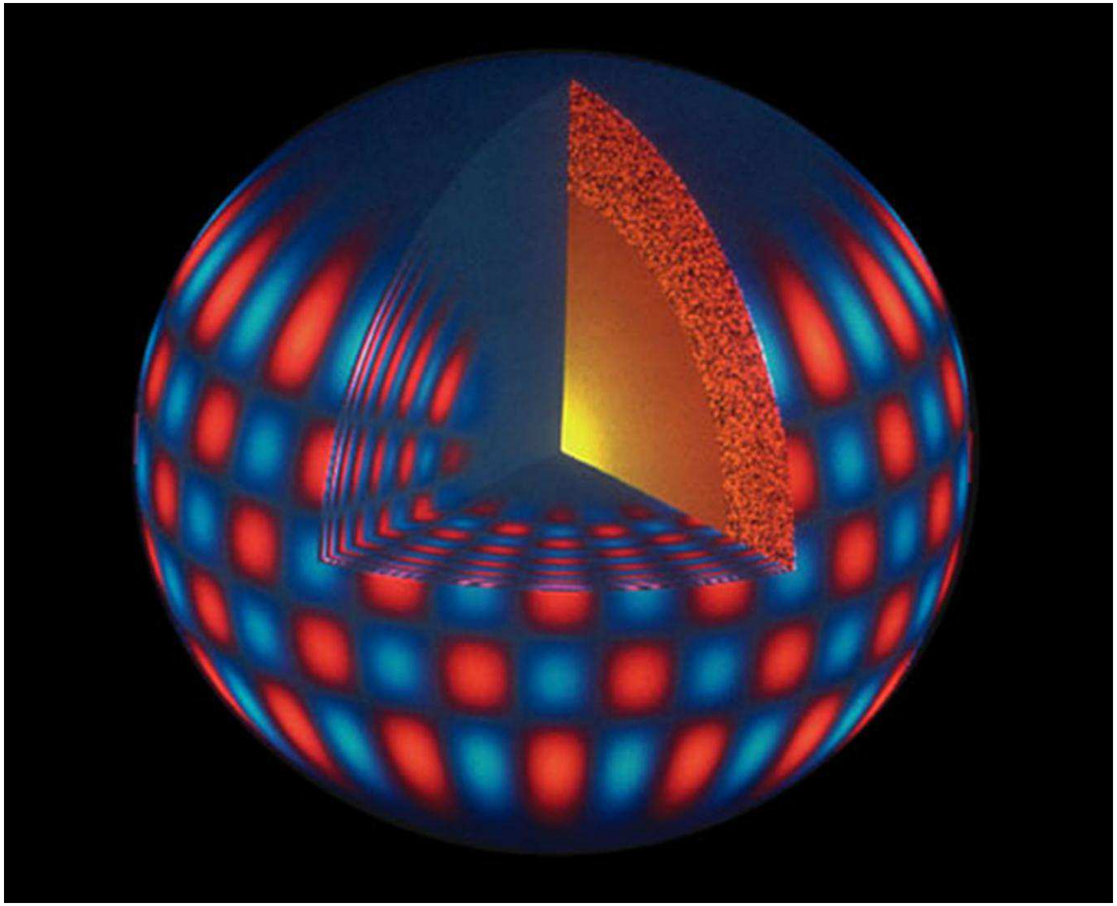
La “chute libre” n'est pas tenable pour tout t.

Exemple

- Les caractéristiques se croisent
- L'équation n'est plus physique

La “chute libre” n'est pas tenable pour tout t.
Il faut réintroduire la pression dans le modèle.
Les caractéristiques donnent de l'information avant même de résoudre complètement le problème.

Ondes Sonores (slight return)



$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$$

Résolution

"On montre" (Poly, annexe G.2) qu'il y a deux familles de solutions, le long de :

$$x = x_0 \pm ct$$

$f(x - ct)$ conservée sur la caractéristique "+"
$g(x + ct)$ conservée sur la caractéristique "-"

Résolution

"On montre" (Poly, annexe G.2) qu'il y a deux familles de solutions, le long de :

$$x = x_0 \pm ct$$

$f(x - ct)$ conservée sur la caractéristique "+"
$g(x + ct)$ conservée sur la caractéristique "-"
On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

Résolution

“On montre” (Poly, annexe G.2) qu’il y a deux familles de solutions, le long de :

$$x = x_0 \pm ct$$

$f(x - ct)$ conservée sur la caractéristique “+”
$g(x + ct)$ conservée sur la caractéristique “-”
On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\,; \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

En reportant dans l’équation :

$$\rho(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Résolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Résolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \right)$$

Finalement :

$$\rho(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

$$u(x,t) = \frac{c}{\rho_0} \left(f(x - ct) - g(x + ct) \right)$$

Résolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

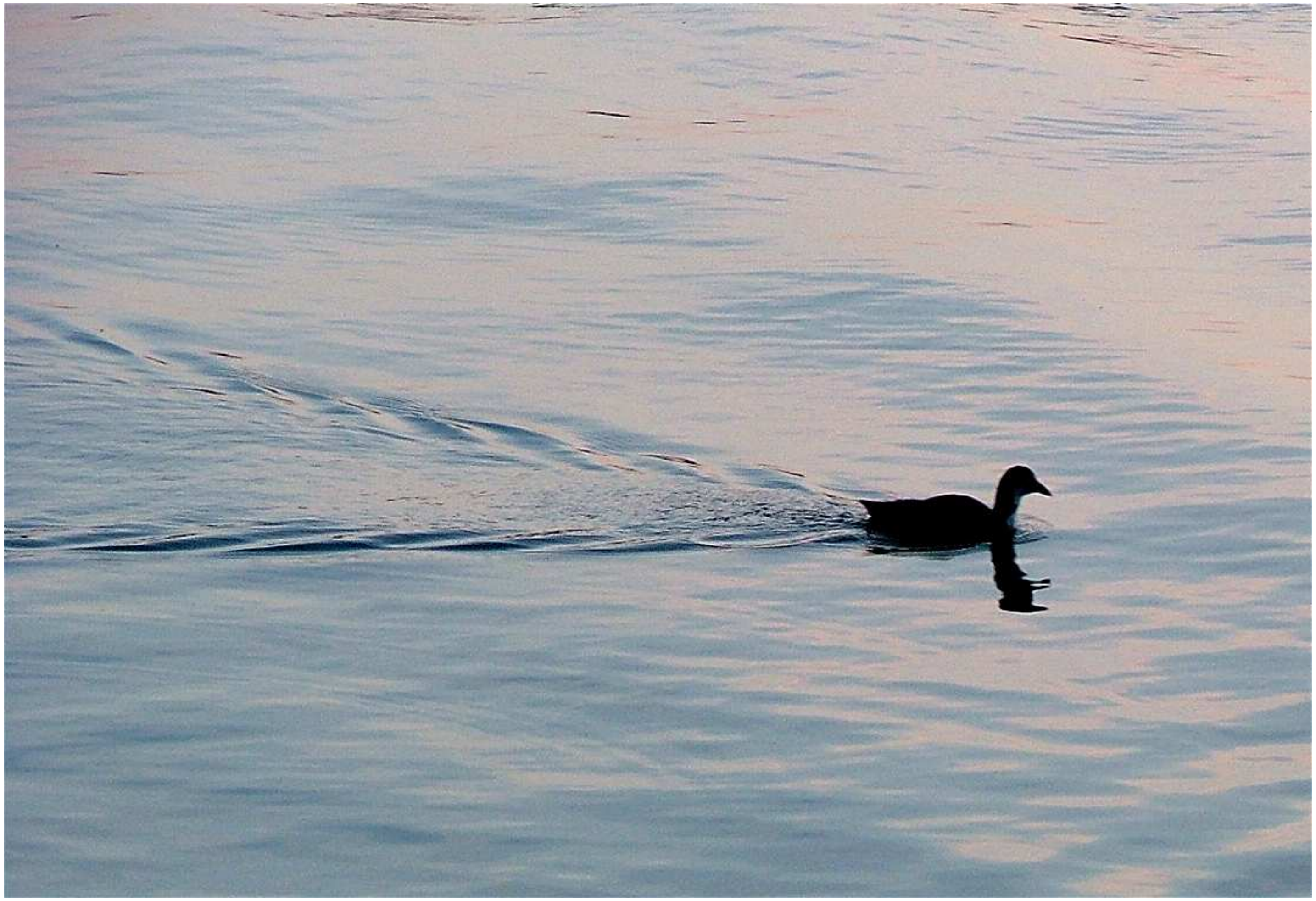
Finalement :

$$\rho(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$u(x,t) = \frac{c}{\rho_0}\left(f(x-ct) - g(x+ct)\right)$$

Forme conservée quelle que soit la perturbation

Perturbations macroscopiques



http://etacar.put.poznan.pl/piotr.pieranski/Perso

Equations Non-linéaires

- A 1D et sans dissipation :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} = -c^2\,\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Equations Non-linéaires

- A 1D et sans dissipation :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} = -c^2\,\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

- De $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = c^2 = \gamma\,\frac{P}{\rho}$ et $P\,\rho^{-\gamma} = P_0\,\rho_0^{-\gamma}$ on tire :

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad ; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1}\,\frac{dc}{c}$$

Changements de variables

- Equations en c et u :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)+u\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)+c\,\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)=0$$

Changements de variables

- Equations en c et u :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)+u\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)+c\,\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)=0$$

- Par somme et différence :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u+c)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(u+\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)=0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(u-\frac{2}{\gamma-1}\,c\right)=0$$

Riemann

- On pose (invariants de Riemann) :

$$Q = u + \frac{2}{\gamma - 1} c$$

$$R = u - \frac{2}{\gamma - 1} c$$

Riemann

- On pose (invariants de Riemann) :

$$Q = u + \frac{2}{\gamma - 1} c$$

$$R = u - \frac{2}{\gamma - 1} c$$

- Deux Eq du 1er ordre. La méthode des caractéristiques donne :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u + c} = \frac{dQ}{0}$$
$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u - c} = \frac{dR}{0}$$

Riemann

- On pose (invariants de Riemann) :

$$Q = u + \frac{2}{\gamma - 1} c$$

$$R = u - \frac{2}{\gamma - 1} c$$

- Deux Eq du 1er ordre. La méthode des caractéristiques donne :

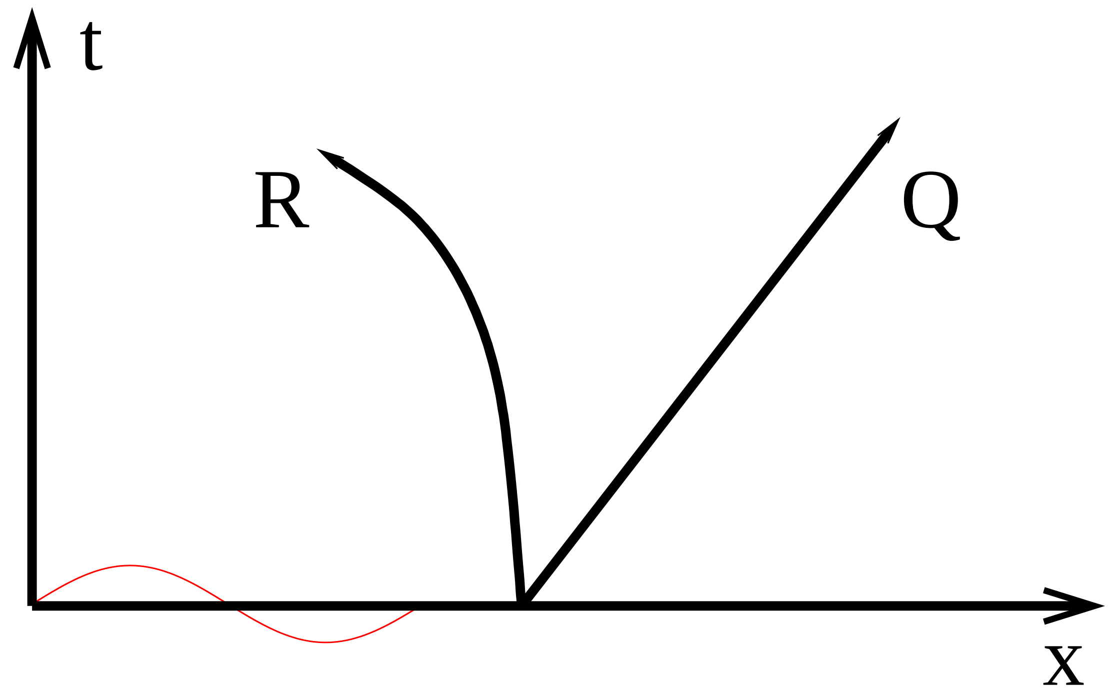
$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u+c} = \frac{dQ}{0}$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u-c} = \frac{dR}{0}$$

- Q constant sur $\frac{dx}{dt} = u + c$, R sur $\frac{dx}{dt} = u - c$.

Exemple

Milieu uniforme ou P et ρ constant, et $u = 0$.
Q et R fixé par état en $t = 0$.



Exemple

- $R = R_0 = -\dfrac{2}{\gamma - 1}\, c_0$ identique pour toutes (même conditions initiales).

Exemple

- $R = R_0 = -\dfrac{2}{\gamma - 1} c_0$ identique pour toutes (même conditions initiales).
- Sur Q, en tout point :

$$u + \frac{2}{\gamma - 1} c = Q_0$$

$$u - \frac{2}{\gamma - 1} c = R_0$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c = \frac{1+\gamma}{4} Q_0 + \frac{3-\gamma}{4} R_0 = Cte$$

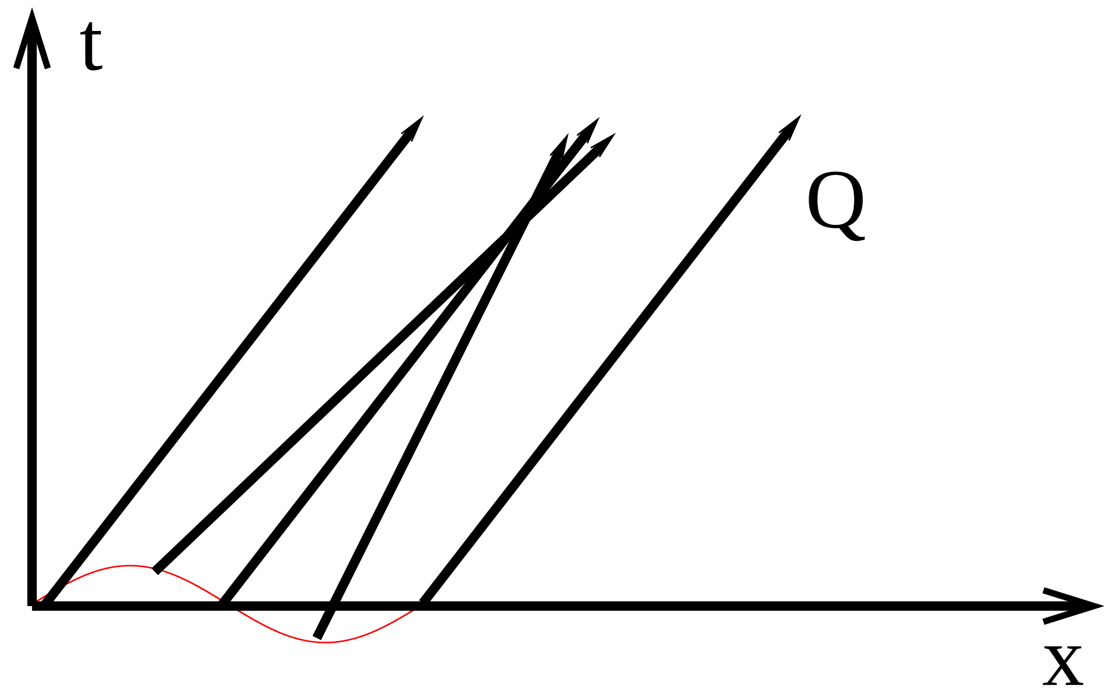
La caractéristique “+” est une droite !

Exemple

La pente dépend de $\rho(t=0)$:

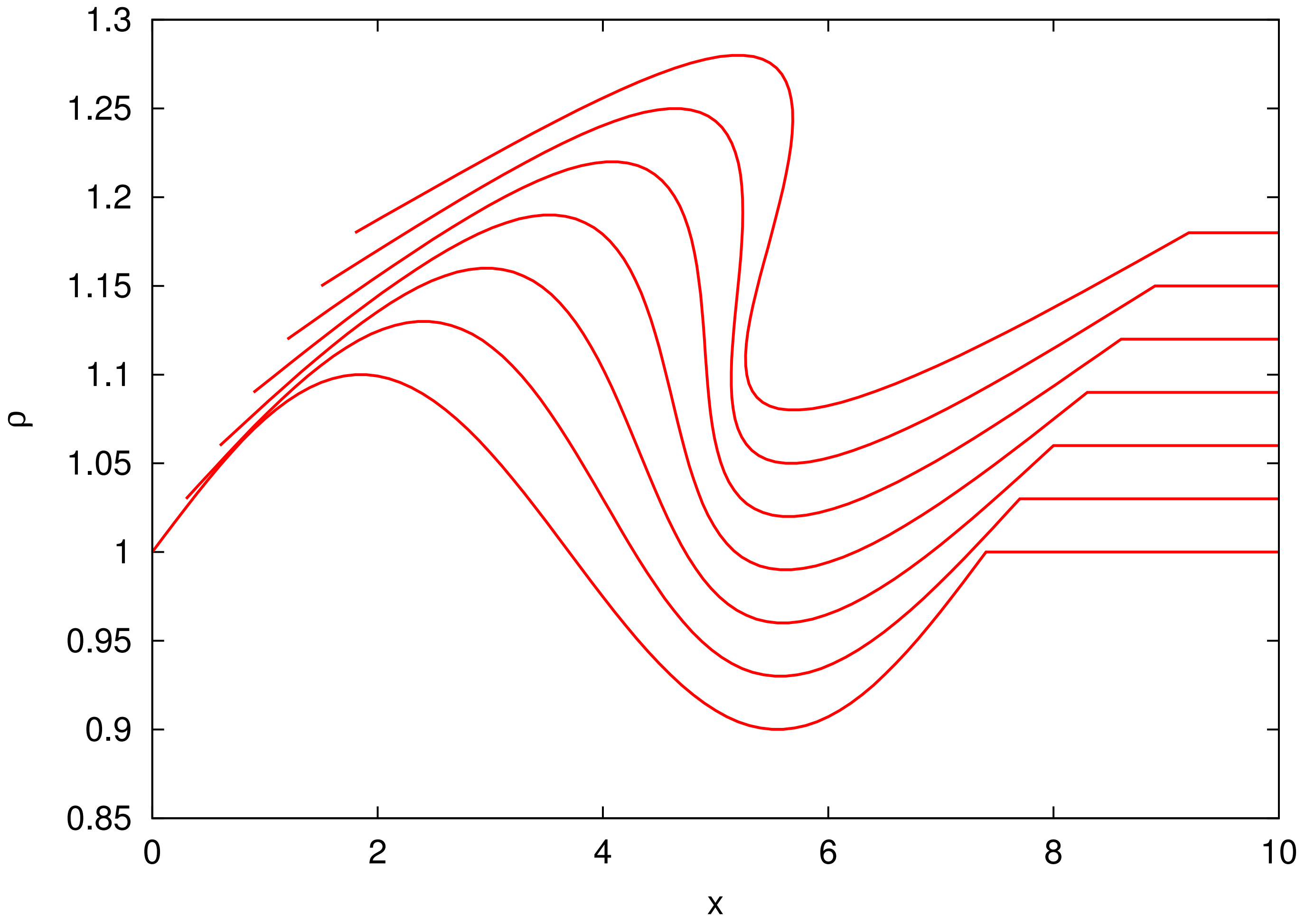
- $\rho > \rho_0 \Rightarrow c > c_0$
- $\rho < \rho_0 \Rightarrow c < c_0$

$$u = \frac{2}{\gamma - 1} c + R_0 = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0)$$



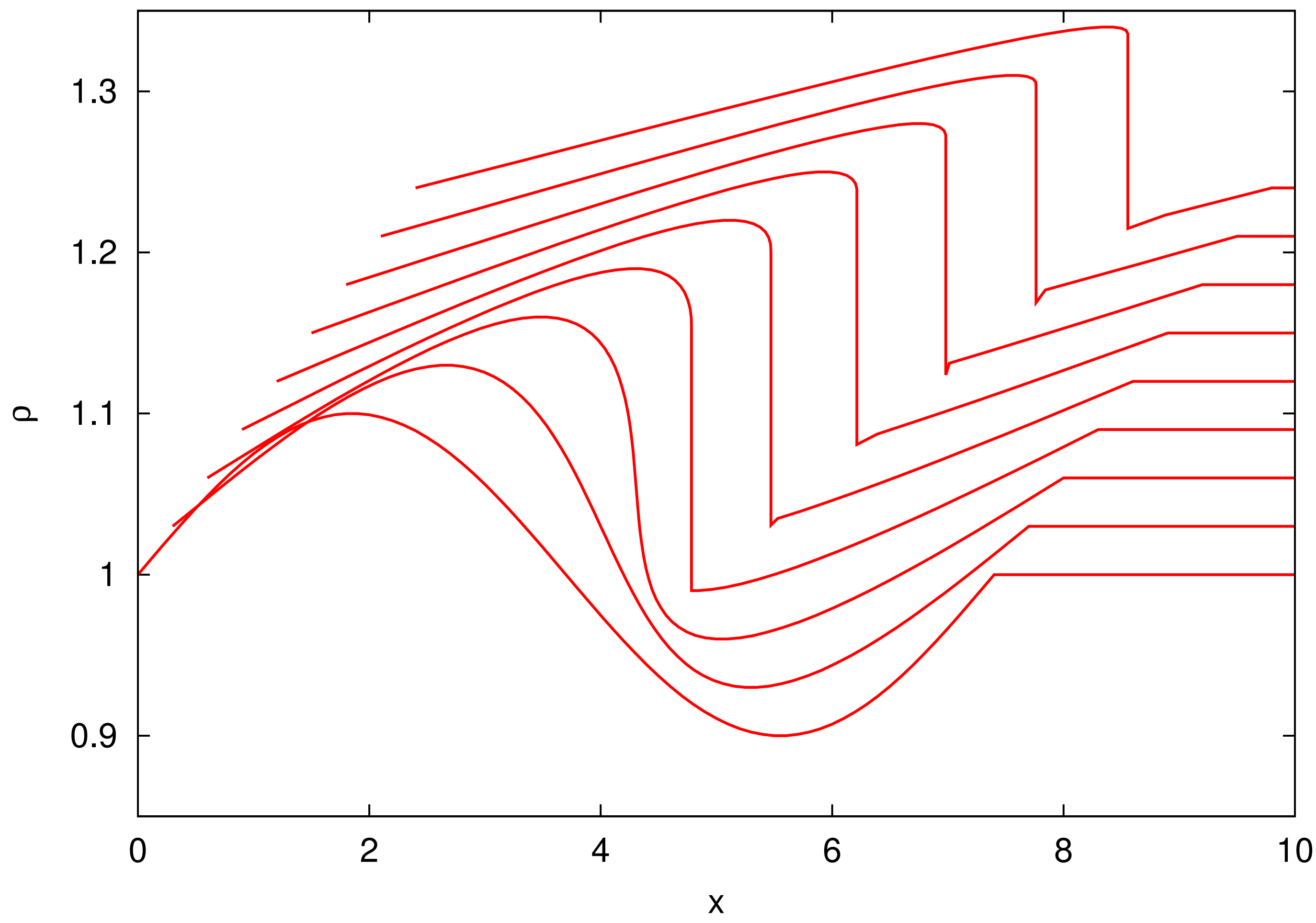
Formation d'un front de choc

La perturbation se raidit, jusqu'à la formation d'un choc :



Formation d'un front de choc

La perturbation se raidit, jusqu'à la formation d'un choc :



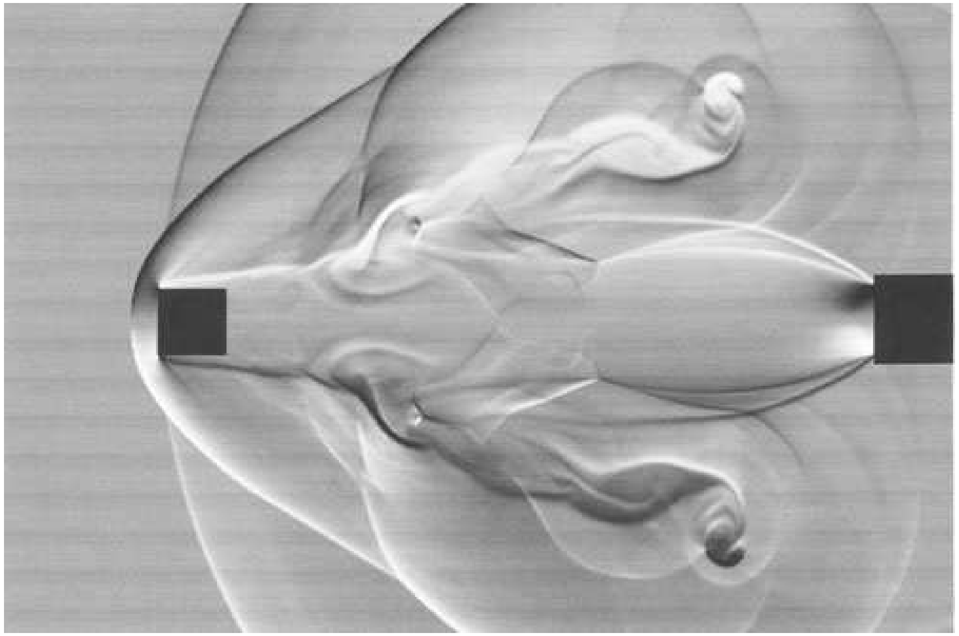
Formation d'un front de choc

Dès formation du choc, il y dissipation !

Formation d'un front de choc

Dès formation du choc, il y dissipation !

- L'hypothèse adiabatique n'est plus valable
- Il faut tenir compte des termes négligés (fonctions de ν)



American Scientist, 2006, Vol 94, 22-31
© Pr Zonglin Jiang (`swdp.imech.ac.cn`)

Voisinage du choc

Ecoulement stationnaire 1D ($\partial/\partial t = 0$) :

$$\frac{\partial \rho\, u_i\, u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{2}{3}\,\mu\, S_{kk}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\mu\, S_{ij})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$

Voisinage du choc

Ecoulement stationnaire 1D ($\partial/\partial t = 0$) :

$$\frac{\partial \rho\, u_i\, u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{2}{3}\,\mu\, S_{kk}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\, S_{ij}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$

Donc :

$$\frac{d}{dx}\left(\rho\, u\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho\, u^2 + P - \frac{4}{3}\mu\,\frac{du}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\rho\left(\frac{1}{2}u^2 + \mathcal{E}\right)\, u + \left(P - \frac{4}{3}\mu\,\frac{du}{dx}\right)\, u - \mathcal{K}\,\frac{dT}{dx}\right] = 0$$

Taille

Typiquement :

$$\rho\, u^2 \sim \frac{4}{3}\mu\, \frac{du}{dx}$$

Taille

Typiquement :

$$\rho\, u^2 \sim \frac{4}{3}\mu\, \frac{du}{dx}$$

- u_1 (amont) $\sim v_T$ (thermique). $u_2 \sim 0$:

$$\frac{4}{3}\mu\, \frac{du}{dx} \sim \rho\, \nu\, \frac{\Delta u}{\Delta x} \sim \rho\, l\, v_{\mathrm{T}}\, \frac{\Delta u}{\Delta x} \sim \rho\, l\, \frac{v_{\mathrm{T}}^2}{\Delta x}$$

$$\rho\, u^2 \sim \rho\, v_{\mathrm{T}}^2$$

$$\Delta x \sim l$$

- L'épaisseur du choc est de l'ordre du libre parcours moyen !
- A une échelle grande devant l mais petite devant L on peut considérer les conditions comme constantes.

Rankine-Hugoniot

- En négligeant la taille de la zone dissipative :

$$\rho_2\, u_2 = \rho_1\, u_1$$

$$\rho_2\, u_2^2 + P_2 = \rho_1\, u_1^2 + P_1$$

$$\frac{1}{2}u_2^2 + \mathcal{E}_2 + \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{1}{2}u_1^2 + \mathcal{E}_1 + \frac{P_1}{\rho_1}$$

Rankine-Hugoniot

- En négligeant la taille de la zone dissipative :

$$\rho_2\, u_2 = \rho_1\, u_1$$

$$\rho_2\, u_2^2 + P_2 = \rho_1\, u_1^2 + P_1$$

$$\frac{1}{2}u_2^2 + \mathcal{E}_2 + \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{1}{2}u_1^2 + \mathcal{E}_1 + \frac{P_1}{\rho_1}$$

- Avec $h = \mathcal{E} + \frac{P}{\rho}$, pour un gaz parfait :

$$\frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k\,T_2}{m} = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k\,T_1}{m}$$

- Vitesse du son :

$$c^2 = \gamma\,\frac{P}{\rho}$$

Rankine-Hugoniot

D'après Shu, on trouve (en fonction de M_1) :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)\ M_1^2}{(\gamma+1) + (\gamma-1)\ \left(M_1^2 - 1\right)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma+1) + 2\,\gamma\ \left(M_1^2 - 1\right)}{(\gamma+1)}$$

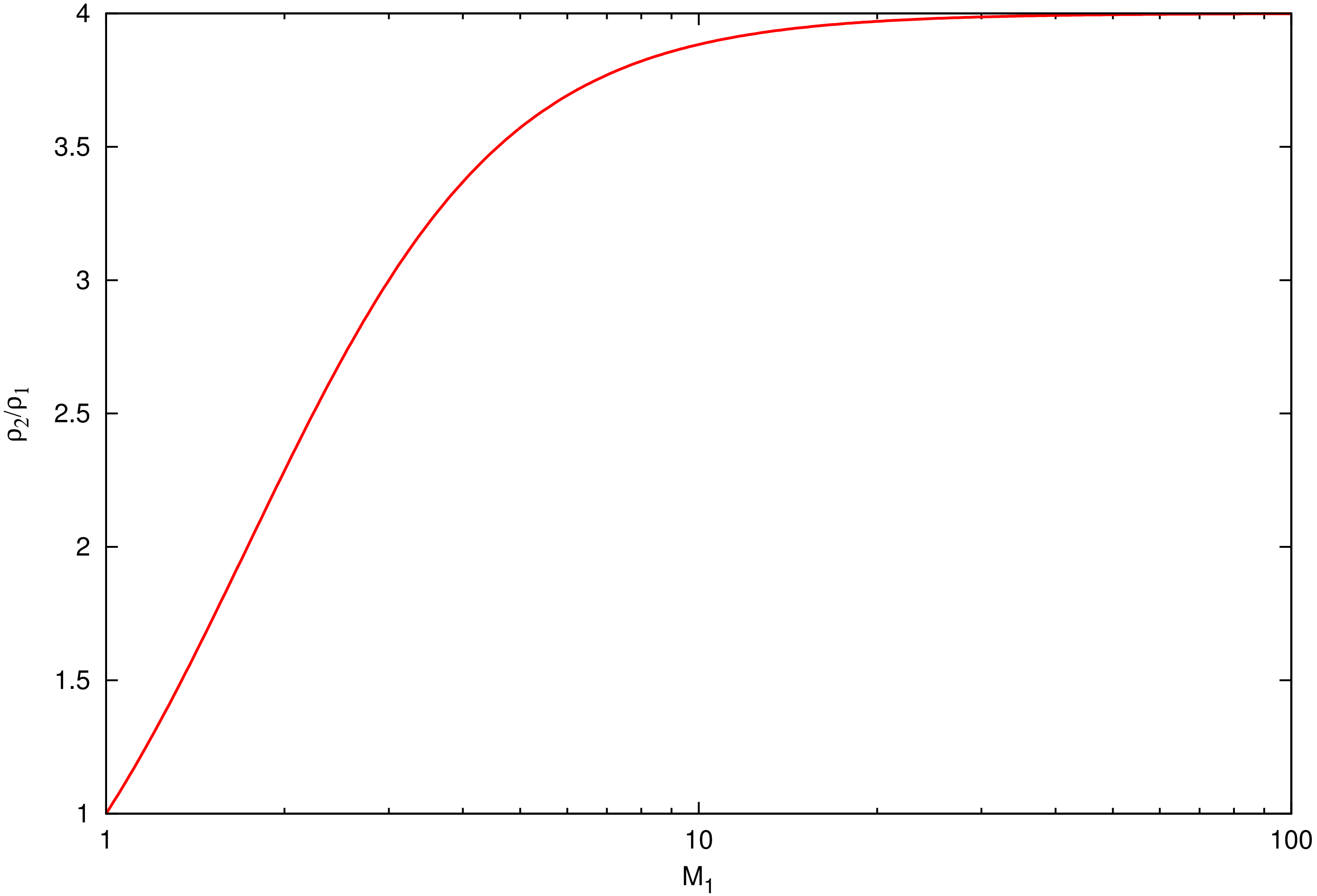
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left[(\gamma+1) + 2\,\gamma\ \left(M_1^2 - 1\right)\right]\ \left[(\gamma+1) + (\gamma-1)\ \left(M_1^2 - 1\right)\right]}{(\gamma+1)^2\ M_1^2}$$

Avec, M_1 nombre Mach amont :

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1}$$

Rankine-Hugoniot

Variation de densité :



Rankine-Hugoniot

Variation de vitesse :