

Hydrodynamique et Turbulence - V

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

5 Octobre 2015

Expansion - Analyse dimensionnelle

Supernova

❖ Expansion SN

Instabilité
gravitationnelle

Energie libérée : E , milieu ambiant : ρ_0 , pas de perte d'énergie.

On cherche $r_{sh}(t)$ et $v_{sh}(t)$. Analyse dimensionnelle :

$$r_{sh} \propto E^\alpha \rho_0^\beta t^\gamma$$

Expansion - Analyse dimensionnelle

Supernova

❖ Expansion SN

Instabilité
gravitationnelle

Energie libérée : E , milieu ambiant : ρ_0 , pas de perte d'énergie.

On cherche $r_{sh}(t)$ et $v_{sh}(t)$. Analyse dimensionnelle :

$$r_{sh} \propto E^\alpha \rho_0^\beta t^\gamma$$

Or : $E : \text{ML}^2 \text{T}^{-2}$, $\rho_0 : \text{ML}^{-3}$, $t : \text{T}$. Donc :

$$\alpha = \frac{1}{5}; \quad \beta = -\frac{1}{5}; \quad \gamma = \frac{2}{5}$$

Expansion - Analyse dimensionnelle

Supernova

❖ Expansion SN

Instabilité
gravitationnelle

Energie libérée : E , milieu ambiant : ρ_0 , pas de perte d'énergie.

On cherche $r_{sh}(t)$ et $v_{sh}(t)$. Analyse dimensionnelle :

$$r_{sh} \propto E^\alpha \rho_0^\beta t^\gamma$$

Or : $E : \text{ML}^2 \text{T}^{-2}$, $\rho_0 : \text{ML}^{-3}$, $t : \text{T}$. Donc :

$$\alpha = \frac{1}{5}; \quad \beta = -\frac{1}{5}; \quad \gamma = \frac{2}{5}$$

Soit :

$$r_{sh}(t) = A \left(\frac{E t^2}{\rho_0} \right)^{1/5}$$

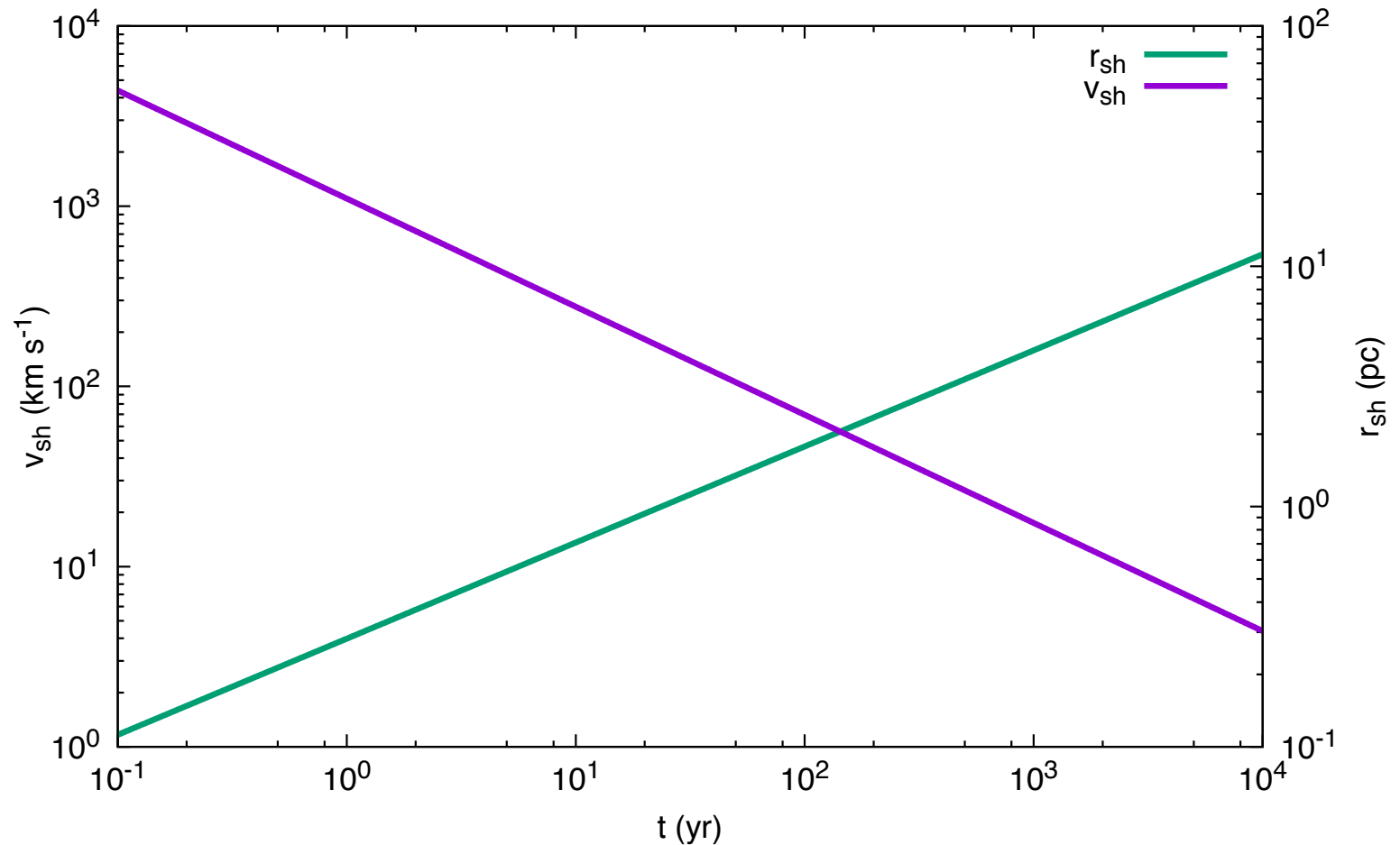
$$v_{sh}(t) = \frac{dr_{sh}}{dt} = \frac{2}{5} A \left(\frac{E}{\rho_0 t^3} \right)^{1/5}$$

Expansion - Analyse dimensionnelle

Supernova

❖ Expansion SN

Instabilité gravitationnelle



$$E = 10^{44} \text{ J}, \rho_0 = 2 \cdot 10^{-21} \text{ kg m}^{-3} \text{ et } 1 M_{\odot} \text{ a } 10^4 \text{ km s}^{-1}.$$

Instabilité gravitationnelle

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion



Conditions initiales

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation
d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

● Conditions initiales :

❖ $\vec{u} = \vec{0}, P = P_0, \rho = \rho_0, T = T_0.$

Conditions initiales

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Conditions initiales :

$$❖ \vec{u} = \vec{0}, P = P_0, \rho = \rho_0, T = T_0.$$

- Arnaque de Jeans :

$$\Delta\Phi = 4\pi G \rho$$

Or (N.-S.) :

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{0}$$

Donc :

$$\rho = 0$$

Ce milieu n'existe pas...

Bilan d'énergie

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

- Pour une sphère :

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

$$E_c = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \frac{M k T}{\mu m_H}$$

Bilan d'énergie

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

- Pour une sphère :

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

$$E_c = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \frac{M k T}{\mu m_H}$$

- Viriel :

$$2 E_c + E_p = 0$$

Bilan d'énergie

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

- Pour une sphère :

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

$$E_c = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \frac{M k T}{\mu m_H}$$

- Viriel :

$$2 E_c + E_p = 0$$

- Equilibre :

$$R_J = \frac{1}{5} G \frac{\mu m_H M}{k T}$$

Sphère de Jeans

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

En grandeurs intensives :

$$R_J = \frac{1}{5} G \frac{\mu m_H M}{k T} = \left(\frac{15}{4\pi G \rho} \right)^{1/2} \left(\frac{k T}{\mu m_H} \right)^{1/2}$$

$$M_J = \left(\frac{3}{4\pi \rho} \right)^{1/2} \left(\frac{5 k T}{\mu m_H G} \right)^{3/2}$$

Sphère de Jeans

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

En grandeurs intensives :

$$R_J = \frac{1}{5} G \frac{\mu m_H M}{k T} = \left(\frac{15}{4\pi G \rho} \right)^{1/2} \left(\frac{k T}{\mu m_H} \right)^{1/2}$$

$$M_J = \left(\frac{3}{4\pi \rho} \right)^{1/2} \left(\frac{5 k T}{\mu m_H G} \right)^{3/2}$$

OU :

$$R_J = 0.18 \left(\frac{T}{10 \text{ K}} \right)^{1/2} \left(\frac{10^{10} \text{ m}^{-3}}{n_H} \right)^{1/2} \text{ pc}$$

$$M_J = 8.7 \left(\frac{T}{10} \right)^{3/2} \left(\frac{10^{10}}{n_H} \right)^{1/2} M_\odot$$

Stabilité

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

● Equations :

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right) = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \Phi$$

● Perturbation isentropique :

$$P \rho^{-\gamma} = Cte$$

$$P_1 = c_s^2 \rho_1$$

Linéarisation

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation

- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_1 = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P_1 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_1$$

D'où (avec $\vec{\nabla} \cdot$) :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta P_1 - 4\pi G \rho_0 P_1 = 0$$

On cherche :

$$P_1(x, t) = \hat{P} \exp(i(kx - \omega t))$$

Equation de dispersion

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation

❖ Dispersion

- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

- Stable si :

$$k > k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s}$$

$$L_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\gamma \pi P_0}{G \rho_0^2}} = \left(\frac{\gamma \pi}{G \rho_0}\right)^{1/2} \left(\frac{k T_0}{\mu m_H}\right)^{1/2}$$

Equation de dispersion

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation

❖ Dispersion

- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

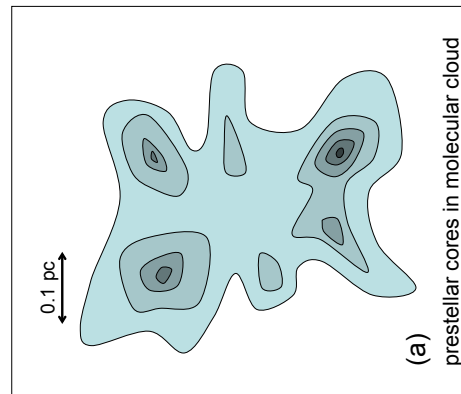
$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

- Stable si :

$$k > k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s}$$

$$L_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\gamma \pi P_0}{G \rho_0^2}} = \left(\frac{\gamma \pi}{G \rho_0}\right)^{1/2} \left(\frac{k T_0}{\mu m_H}\right)^{1/2}$$

- Effondrement $\Rightarrow \rho \nearrow \Rightarrow L_J \searrow \Rightarrow$ Fragmentation

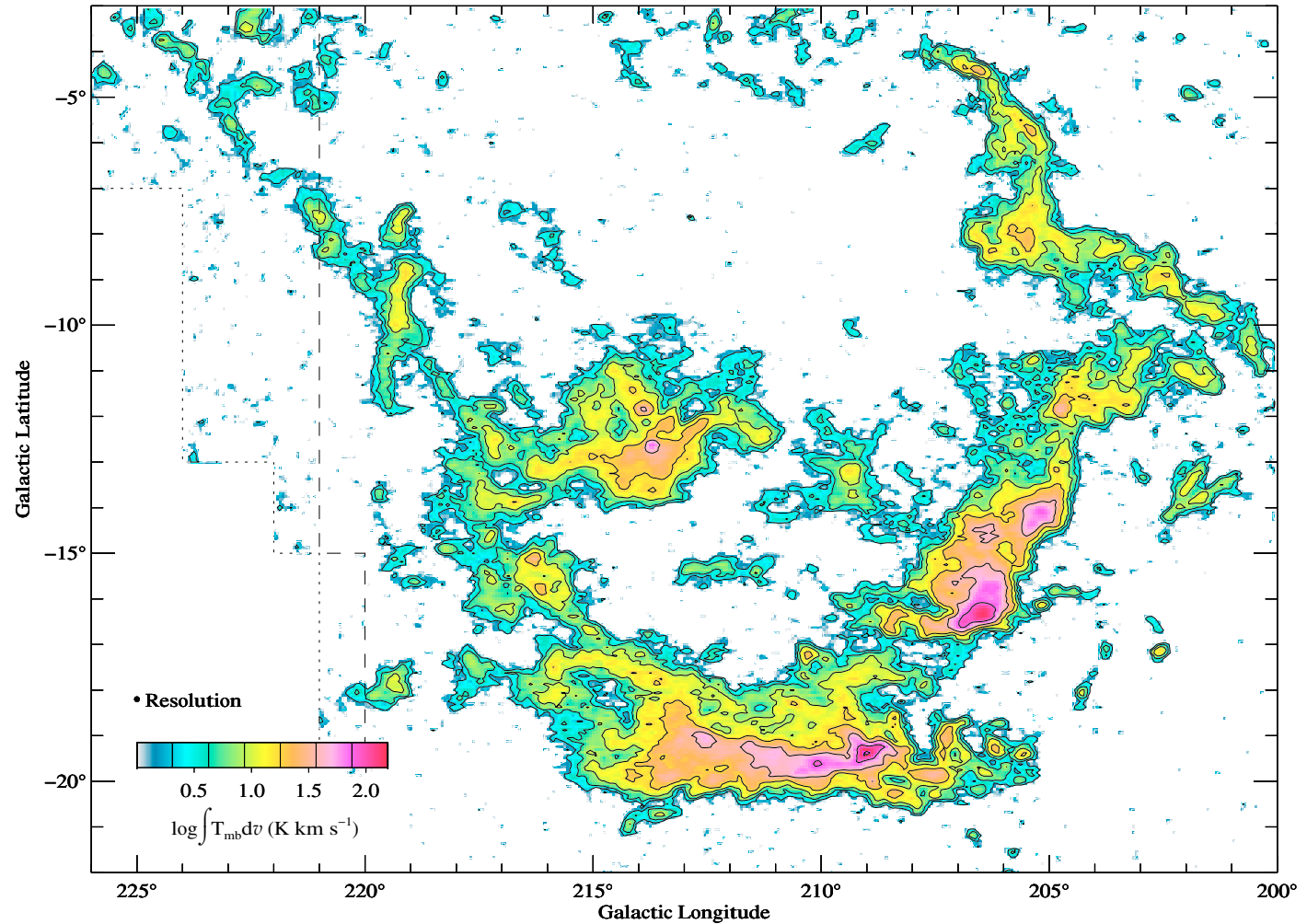


Formation d'étoiles

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion



CO 1 – 0, Orion-Monoceros (Wilson et al., 2005)

Rotation

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ **Rotation**
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Référentiel en rotation :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

Rotation

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles

❖ Rotation

- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Référentiel en rotation :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

- Pour $\vec{U} = \vec{0}$

$$0 = -\frac{\vec{\nabla} P_0}{\rho_0} - \vec{\nabla} \Phi_0 - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

$$\frac{\vec{\nabla} (P_0 + P_1)}{(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_0 + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \vec{\nabla} P_0$$

Rotation

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles

❖ Rotation

- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Référentiel en rotation :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

- Pour $\vec{U} = \vec{0}$

$$0 = -\frac{\vec{\nabla} P_0}{\rho_0} - \vec{\nabla} \Phi_0 - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

$$\frac{\vec{\nabla} (P_0 + P_1)}{(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_0 + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \vec{\nabla} P_0$$

$$P_0 = Cte \Rightarrow \vec{\nabla} P_0 = \vec{0}$$

Rotation

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

- D'où (avec $P_1 = c_s^2 \rho_1$) :

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \vec{\nabla} \rho_1 - \vec{\nabla} \Phi_1 - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_1$$

- Perturbation proportionnelle a : $\exp(i \vec{k} \cdot \vec{r} - i \omega t)$
pour Φ_1 , ρ_1 et $\vec{U}_1 = (u, v, w)$.

Rotation

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Référentiel local (x, y, z) avec $\vec{e}_z // \vec{k}$ et $\vec{\Omega}$ dans (yOz) :

$$\vec{k} = (0, 0, k) ; \quad \vec{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta)$$

Rotation

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ **Rotation**

❖ Dispersion

❖ Discussion

- Référentiel local (x, y, z) avec $\vec{e}_z // \vec{k}$ et $\vec{\Omega}$ dans (yOz) :

$$\vec{k} = (0, 0, k) ; \quad \vec{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta)$$

- Alors :

$$\begin{cases} i \omega u + 2 \Omega \cos \theta v - 2 w \Omega \sin \theta + 0 + 0 & = 0 \\ -2 u \Omega \cos \theta + i \omega v + 0 + 0 + 0 & = 0 \\ 2 u \Omega \sin \theta u + 0 + i \omega w - i \frac{k c_s^2}{\rho_0} \rho_1 - i k \Phi_1 & = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 4 \pi G \rho_1 + k^2 \Phi_1 & = 0 \\ 0 + 0 + i k \rho_0 w + i \omega \rho_1 + 0 & = 0 \end{cases}$$

Equation de dispersion

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Thompsons (2007) :

$$\omega^4 - (4\Omega^2 + \sigma^2) \omega^2 + 4\Omega^2 \sigma^2 \cos^2 \theta = 0$$

avec : $\sigma^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$

- Stable si $\omega^2 > 0$.

Equation de dispersion

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

- Thompsons (2007) :

$$\omega^4 - (4\Omega^2 + \sigma^2) \omega^2 + 4\Omega^2 \sigma^2 \cos^2 \theta = 0$$

avec : $\sigma^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$

- Stable si $\omega^2 > 0$.

- Soit :

$$4\Omega^2 + \sigma^2 > 0$$

$$4\Omega^2 \sigma^2 \cos^2 \theta > 0$$

- Instabilité : il faut $\sigma^2 < 0$, soit :

$$k^2 < \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}$$

Discussion

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Même critère que sans rotation !
 - ◆ La rotation, en soi, ne déstabilise pas.

Discussion

Supernova

Instabilité gravitationnelle

- ❖ Conditions initiales
- ❖ Bilan d'énergie
- ❖ Sphère de Jeans
- ❖ Stabilité
- ❖ Linéarisation
- ❖ Dispersion
- ❖ Formation d'étoiles
- ❖ Rotation
- ❖ Rotation
- ❖ Dispersion
- ❖ Discussion

- Même critère que sans rotation !
 - ◆ La rotation, en soi, ne déstabilise pas.

- On a :

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (4\Omega^2 + \sigma^2) \pm \frac{1}{2} \left((4\Omega^2 + \sigma^2)^2 - 16\Omega^2 \sigma^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2}$$

- Rotation faible ($-\sigma^2 \gg \Omega^2$). Racine instable :

$$\omega_+^2 = \sigma^2 + 4\Omega^2 \sin^2 \theta$$

Discussion

Supernova

Instabilité
gravitationnelle

❖ Conditions initiales

❖ Bilan d'énergie

❖ Sphère de Jeans

❖ Stabilité

❖ Linéarisation

❖ Dispersion

❖ Formation
d'étoiles

❖ Rotation

❖ Rotation

❖ Dispersion

❖ Discussion

- Taux de croissance :

$$\exp \left(\sqrt{-\sigma^2 - 4 \Omega^2 \sin^2 \theta} t \right)$$

- ◆ la rotation ralentit la croissance de l'instabilité
 - ◆ Effet nul suivant l'axe
 - ◆ Effet maximal dans le plan \perp
- Formation d'un disque !