

# Hydrodynamique et Turbulence - VI

Jacques Le Bourlot  
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

5 Octobre 2016

# Fluctuations

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS



Horace Lamb (1932) :

"I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic."

# Fluctuations

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

On pose  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est une fluctuation autour de l'écoulement moyen  $\vec{V}$  (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0; \quad \overline{u_i} = 0$$

# Fluctuations

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

On pose  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est une fluctuation autour de l'écoulement moyen  $\vec{V}$  (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0; \quad \overline{u_i} = 0$$

On prend la moyenne :

$$\rho \left( \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) V_i + \overline{\rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) u_i} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}$$

# Fluctuations

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

On pose  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est une fluctuation autour de l'écoulement moyen  $\vec{V}$  (supposé stationnaire).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) v_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0; \quad \overline{u_i} = 0$$

On prend la moyenne :

$$\rho \left( \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) V_i + \overline{\rho \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) u_i} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}$$

$$\left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) u_i = \left( u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$$

# Fluctuations

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

Donc :

$$\rho \left( \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) V_i = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i u_j}]$$

# Fluctuations

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

Donc :

$$\rho \left( \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) V_i = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\tau_{ij}} - \rho \overline{u_i u_j}]$$

On définit le “tenseur des contraintes de Reynolds” par :

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u_i u_j}$$

C’est le flux d’impulsion moyen induit par la turbulence.

# Fermeture

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

- Pour calculer  $\overline{V}$  il faut une équation donnant  $\overline{u_i u_j}$



# Fermeture

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

- Pour calculer  $\overline{\vec{V}}$  il faut une équation donnant  $\overline{u_i u_j}$
- Pour calculer  $\overline{u_i u_j}$ , il faut une équation donnant  $\overline{u_i u_j u_k}$

# Fermeture

Fluctuations

❖ Fluctuations

❖ Fermeture

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

- Pour calculer  $\overline{\vec{V}}$  il faut une équation donnant  $\overline{u_i u_j}$
- Pour calculer  $\overline{u_i u_j}$ , il faut une équation donnant  $\overline{u_i u_j u_k}$
- Etc...

Il faut une hypothèse “ad hoc” pour “fermer” le système.

- Modèles empiriques.
- Industrie “ $k - \epsilon$ ”

# Kolmogorov (1903 - 1987)

Fluctuations

---

Théorie de  
Kolmogorov

---

❖ Kolmogorov

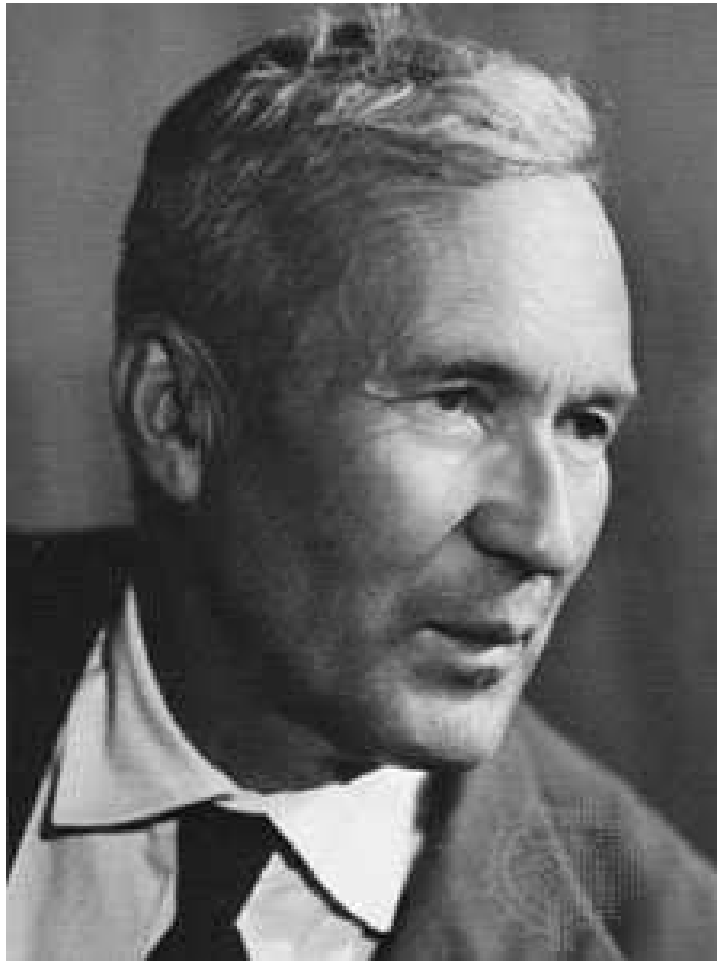
❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

---



“In an introductory course on turbulence, of about thirty hours of lecturing, many aspects had to be left out”.

U. Frisch, in introduction to “Turbulence, The legacy of A.N. Kolmogorov”, 1995

# *Turbulence Développée*

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ **Turbulence**

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- Hypothèses
  - ◆ Pas de mouvement d'ensemble.

# *Turbulence Développée*

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ **Turbulence**

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- Hypothèses
  - ❖ Pas de mouvement d'ensemble.
  - ❖ Homogène.

# *Turbulence Développée*

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ **Turbulence**

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- Hypothèses
  - ❖ Pas de mouvement d'ensemble.
  - ❖ Homogène.
  - ❖ Isotrope.

# *Turbulence Développée*

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ **Turbulence**

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- Hypothèses
  - ❖ Pas de mouvement d'ensemble.
  - ❖ Homogène.
  - ❖ Isotrope.
  - ❖ Stationnaire.

# Turbulence Développée

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

## ● Hypothèses

- ❖ Pas de mouvement d'ensemble.
- ❖ Homogène.
- ❖ Isotrope.
- ❖ Stationnaire.

Donc :

$$\langle \vec{V} \rangle = \vec{0}$$

$$u^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{3} \mathbf{u}^2 \right\rangle$$



# Échelles

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

A une échelle  $l$  caractérisée par une vitesse typique  $u_l$ , on a :

# Échelles

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

A une échelle  $l$  caractérisée par une vitesse typique  $u_l$ , on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$  : Temps de retournement.

# Échelles

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

A une échelle  $l$  caractérisée par une vitesse typique  $u_l$ , on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$  : Temps de retournement.
- $\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{t_l} = \frac{u_l^3}{l}$  : Taux de dissipation de l'énergie.

# Échelles

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

A une échelle  $l$  caractérisée par une vitesse typique  $u_l$ , on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$  : Temps de retournement.
- $\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{t_l} = \frac{u_l^3}{l}$  : Taux de dissipation de l'énergie.
- $R_l = \frac{l u_l}{\nu}$  : Reynolds local.

# Échelles

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

À une échelle  $l$  caractérisée par une vitesse typique  $u_l$ , on a :

- $t_l \sim \frac{l}{u_l}$  : Temps de retournement.
- $\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{t_l} = \frac{u_l^3}{l}$  : Taux de dissipation de l'énergie.
- $R_l = \frac{l u_l}{\nu}$  : Reynolds local.

Échelle de Kolmogorov  $\eta$  : dissipation visqueuse efficace

$$R_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$$

# Cascade de Richardson

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ **Richardson**

Application au MIS



[www.sensitivelight.com](http://www.sensitivelight.com) (lien mort...)

# *Cascade de Richardson*

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- L'énergie est injectée à l'échelle  $L$  (grandes échelles)

# *Cascade de Richardson*

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- L'énergie est injectée à l'échelle  $L$  (grandes échelles)
- L'énergie passe d'échelles en échelles (les tourbillons donnent naissance à des tourbillons plus petits par étirements - replis)



# Cascade de Richardson

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- L'énergie est injectée à l'échelle  $L$  (grandes échelles)
- L'énergie passe d'échelles en échelles (les tourbillons donnent naissance à des tourbillons plus petits par étirements - replis)
- Elle est dissipée lorsque le "temps visqueux" est de l'ordre du "temps dynamique" (échelle de Kolmogorov).

# Cascade de Richardson

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- L'énergie est injectée à l'échelle  $L$  (grandes échelles)
- L'énergie passe d'échelles en échelles (les tourbillons donnent naissance à des tourbillons plus petits par étirements - replis)
- Elle est dissipée lorsque le "temps visqueux" est de l'ordre du "temps dynamique" (échelle de Kolmogorov).
- Hypothèse :

$$R_l \gg 1 \Rightarrow \epsilon_l = \epsilon = \text{Cte}$$

Voir film à :

[http://serve.me.nus.edu.sg/limtt/#Video\\_Gallery](http://serve.me.nus.edu.sg/limtt/#Video_Gallery)

# Cascade de Richardson

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- $\epsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij} \sim \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$

# Cascade de Richardson

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- $\epsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij} \sim \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$
- Injection = Dissipation :

$$\frac{u_L^3}{L} = \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$$

# Cascade de Richardson

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

Application au MIS

- $\epsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij} \sim \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$
- Injection = Dissipation :

$$\frac{u_L^3}{L} = \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$$

$$\eta = (R_L)^{-3/4} L$$

$$t_\eta = (R_L)^{-1/2} t_L$$

$$u_\eta = (R_L)^{-1/4} u_L$$

# Cascade de Richardson

## Fluctuations

## Théorie de Kolmogorov

❖ Kolmogorov

❖ Turbulence

❖ Échelles

❖ Richardson

## Application au MIS

- $\epsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij} \sim \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$
- Injection = Dissipation :

$$\frac{u_L^3}{L} = \nu \frac{u_\eta^2}{\eta^2}$$

$$\eta = (R_L)^{-3/4} L$$

$$t_\eta = (R_L)^{-1/2} t_L$$

$$u_\eta = (R_L)^{-1/4} u_L$$

$R_L$	$10^3$	$10^5$	$10^7$	$10^9$
$L/\eta$	178	5620	178000	5620000
$t_L/t_\eta$	32	316	3160	31600
$U_L/u_\eta$	5.6	18	56	180

# S140

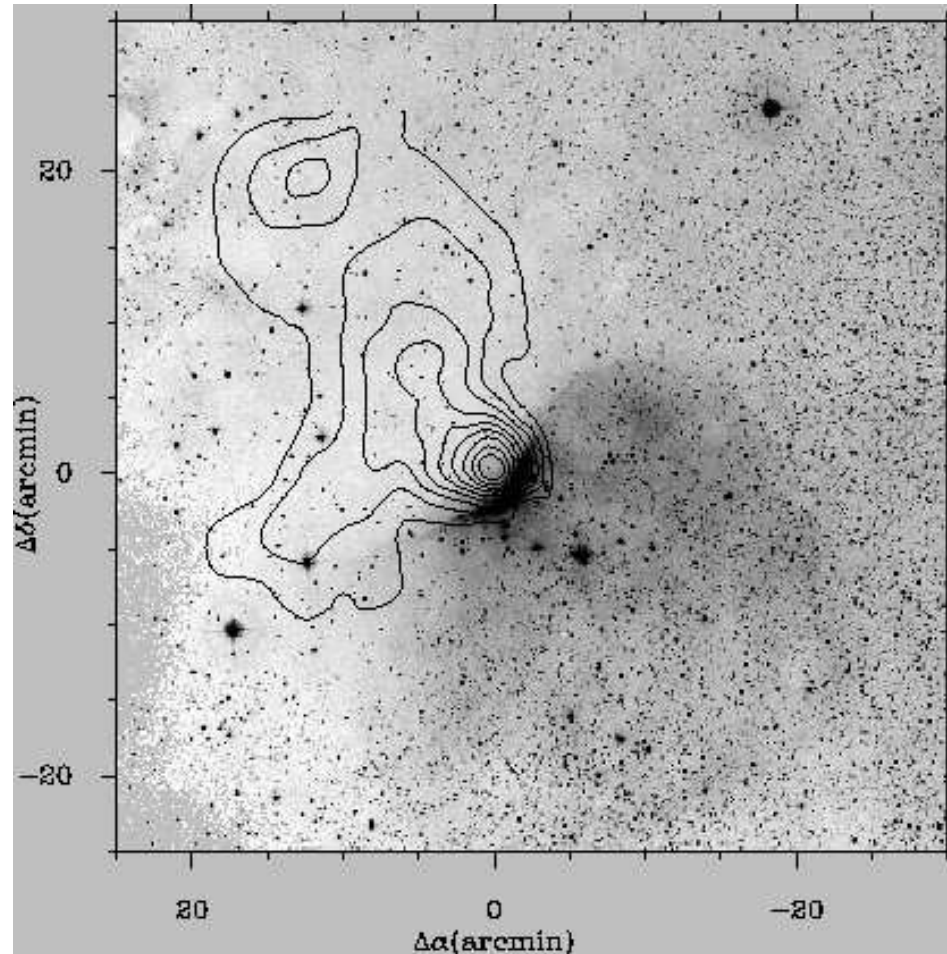
Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation



Distance : 940 pc, Isocontours :  $^{13}\text{CO } J : 2 \rightarrow 1$

# S140

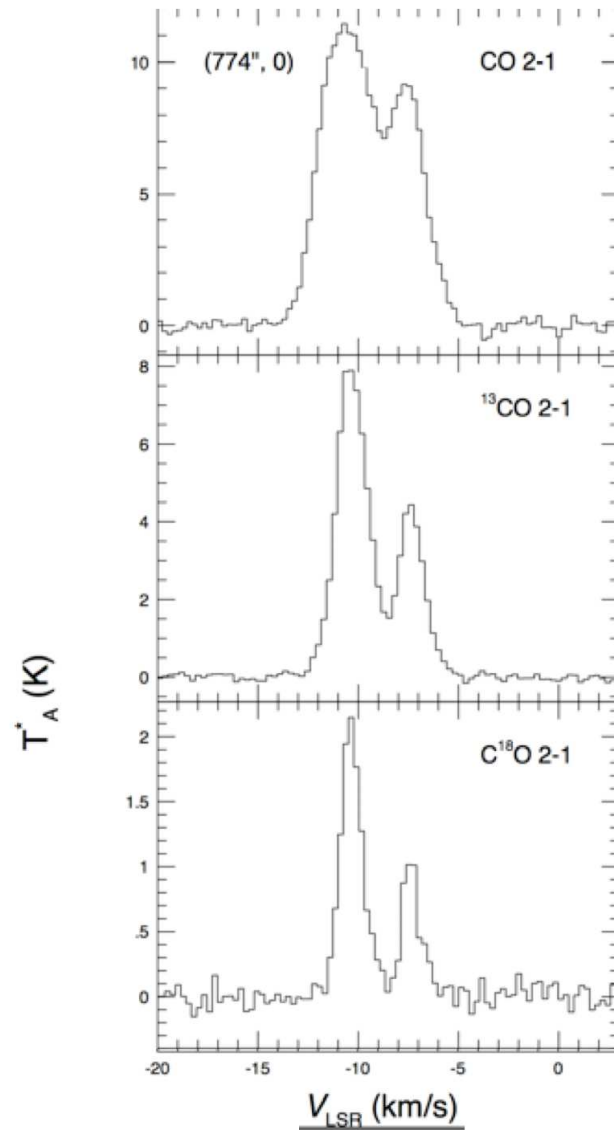
Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation



$^{12}\text{CO}$  : raie épaisse.

$^{13}\text{CO}$  : raie mince.

$\Rightarrow v_L \sim 2.5 \text{ km s}^{-1}$

$\text{C}^{18}\text{O}$  : coeur seulement.



# S140

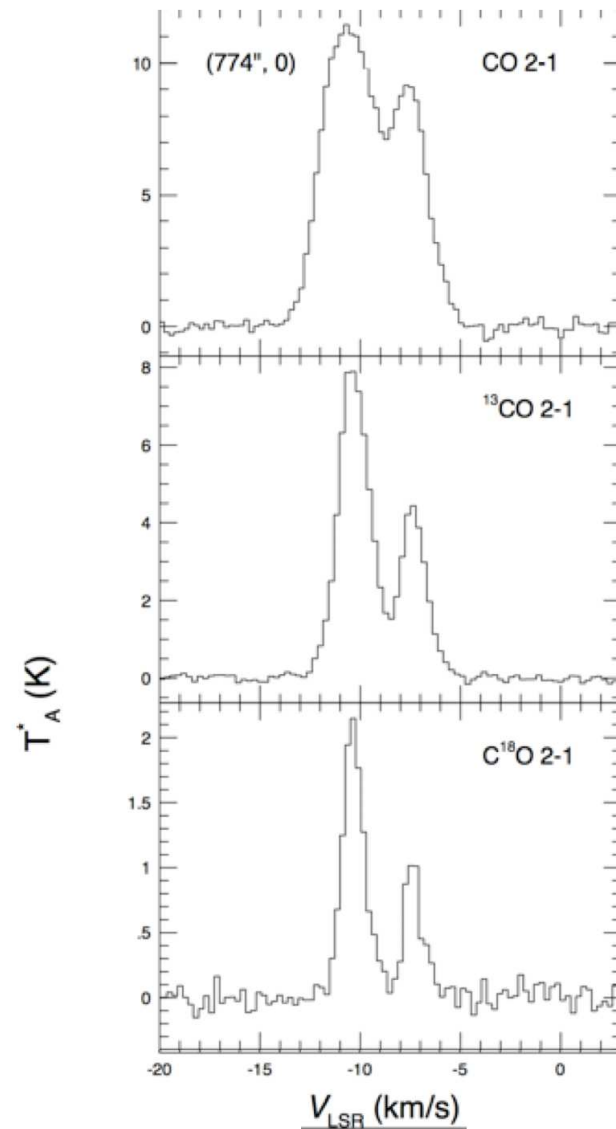
Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation



$^{12}\text{CO}$  : raie épaisse.

$^{13}\text{CO}$  : raie mince.

$\Rightarrow v_L \sim 2.5 \text{ km s}^{-1}$

$\text{C}^{18}\text{O}$  : coeur seulement.

$$L \sim 1.2 \cdot 10^{19} \text{ cm}$$

$$v_L \sim 2.5 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\nu \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} (?)$$

# S140

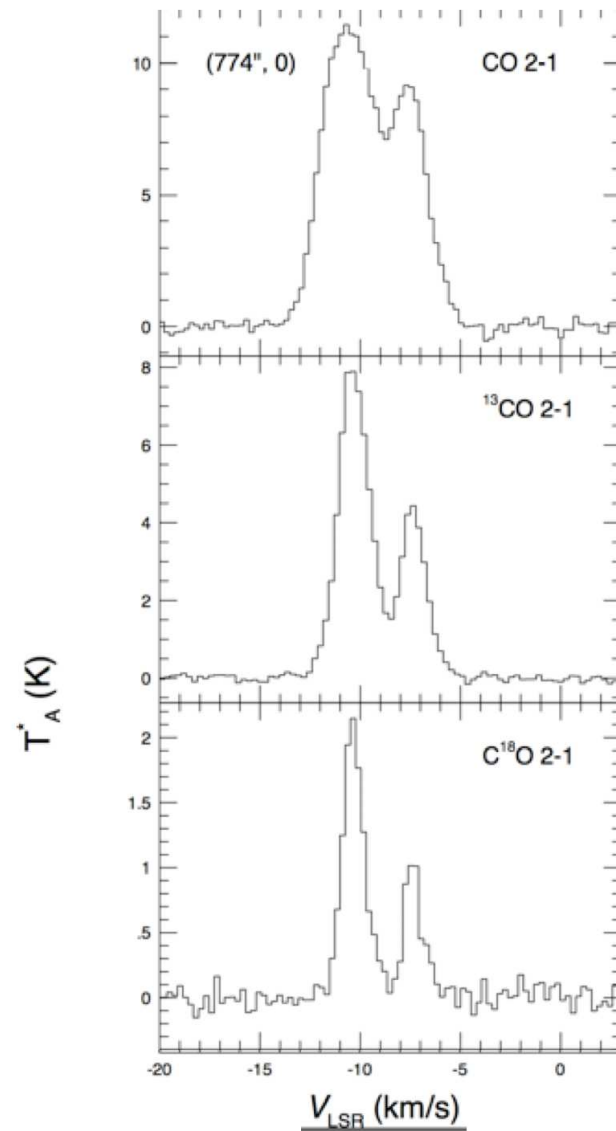
Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation



$^{12}\text{CO}$  : raie épaisse.

$^{13}\text{CO}$  : raie mince.

$\Rightarrow v_L \sim 2.5 \text{ km s}^{-1}$

$\text{C}^{18}\text{O}$  : coeur seulement.

$$L \sim 1.2 \cdot 10^{19} \text{ cm}$$

$$v_L \sim 2.5 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\nu \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} (?)$$

$$Re \sim 10^9$$

# Dissipation

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L (Re)^{-3/4} \sim 7 \cdot 10^{-7} \text{ pc} \sim 0.1 \text{ A.U.}$$

# Dissipation

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L (Re)^{-3/4} \sim 7 \cdot 10^{-7} \text{ pc} \sim 0.1 \text{ A.U.}$$

Résolution :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

# Dissipation

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L (Re)^{-3/4} \sim 7 \cdot 10^{-7} \text{ pc} \sim 0.1 \text{ A.U.}$$

Résolution :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

Diamètre nécessaire :

$$D \sim \frac{\lambda}{\theta} \sim 2000 \text{ km}$$

# Dissipation

Fluctuations

Théorie de  
Kolmogorov

Application au MIS

❖ S140

❖ Dissipation

Echelle de Kolmogorov :

$$\eta = L (Re)^{-3/4} \sim 7 \cdot 10^{-7} \text{ pc} \sim 0.1 \text{ A.U.}$$

Résolution :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

Diamètre nécessaire :

$$D \sim \frac{\lambda}{\theta} \sim 2000 \text{ km}$$

⇒ VLBI (sub-)mm !