Diffusion Rayleigh

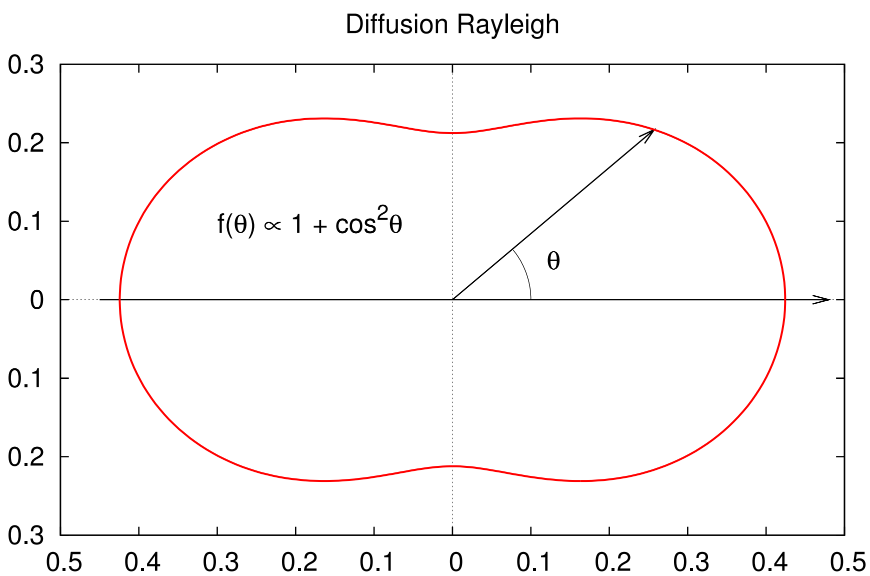
JLB

25 Septembre 2009

1 Définition

La diffusion de Rayleigh n'est **pas** isotrope ! Elle a pour fonction de phase

$$f(\theta) \propto \left(1 + \cos^2\theta\right)$$



La probabilité d'être diffusé dans l'angle solide $d\Omega$ est donc proportionnelle à $f(\theta)\, d\Omega$. Cette fonction est donc normalisée de telle sorte que :

$$A \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} f(\theta)\, \sin\theta \, d\theta = 4\pi$$

Or :

$$2\pi\, A \int_0^{\pi} \left(1+\cos^2\theta\right) \sin\theta \, d\theta = 2\pi A \int_{-1}^{1} \left(1+u^2\right)\, du$$

$$= 2\pi A \left[u+\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\pi A\, \frac{8}{3}$$

La constante de normalisation A est donc :

$$A = \frac{3}{4}$$

2 Tirage aléatoire

Pour générer une diffusion suivant Rayleigh, on utilise le fait que la primitive de $f(\theta)\, \sin\theta$ (nulle pour $\theta = 0$) est :

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{3}{4} \left(1+\cos^2 t\right) \sin t \, dt$$

On pose de nouveau $u = \cos t$ soit $du = -\sin t\, dt$ et on a :

$$F(\theta) = -\frac{3}{4} \int_1^{\cos\theta} \left(1+u^2\right)\, du = -\frac{3}{4} \left[u+\frac{u^3}{3}\right]_1^{\cos\theta}$$

$$F(\theta) = -\frac{3}{4} \int_1^{\cos\theta} \left(1+u^2\right)\, du = \left(1-\frac{1}{4}\cos\theta \left(3+\cos^2\theta\right)\right)$$

$$F(\theta) = 1-\frac{1}{4}\, \cos\theta \left(3+\cos^2\theta\right)$$

On retrouve bien :

$$F'(\theta) = \frac{3}{4}\, \sin\theta \, \left(1+\cos^2\theta\right)$$

Pour générer des nombres θ distribués suivant $f(\theta)$ il faut donc tirer un nombre y uniforme entre 0 et 1 et calculer $F^{-1}(y)$.

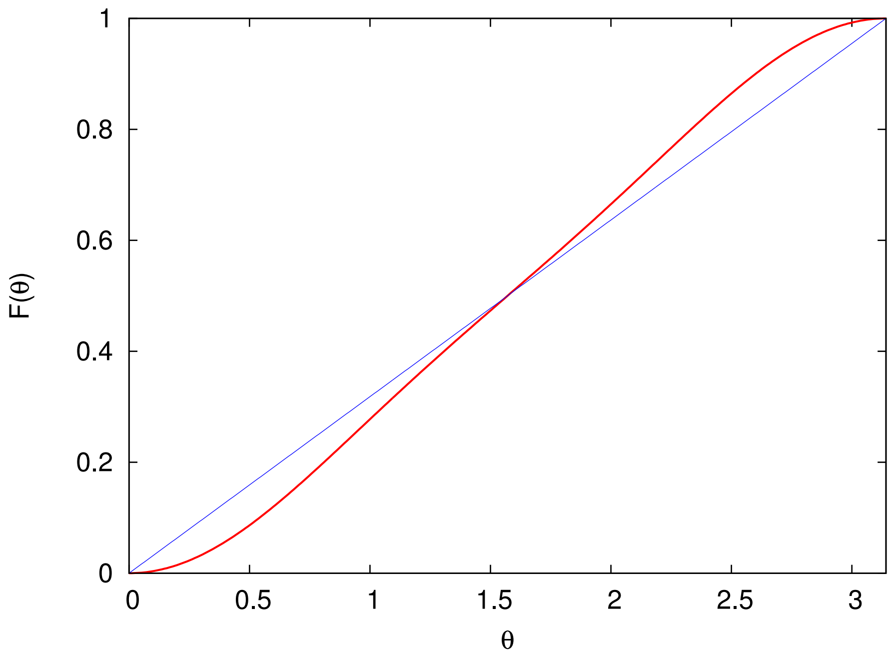
3 Méthode

On cherche donc un θ tel que :

$$y = F(\theta) = 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \left(3 + \cos^2\theta\right)$$

Si on tire une valeur y_0 suivant une loi uniforme, l'équation à résoudre est donc :

$$F(\theta) - y_0 = 0$$



Il se trouve que cette fonction est "assez" proche de la droite $y = \theta/\pi$. Il suffit donc de tirer un y_0 entre 0 et 1, de partir de $\theta_0 = \pi\, y_0$, et d'utiliser une méthode de Newton pour trouver $\theta = F^{-1}(y_0)$. L'itération est :

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{F(\theta_n) - y_0}{F'(\theta_n)}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{4 - \cos\theta\,(3 + \cos^2\theta) - 4y_0}{3\,\sin\theta\,\,(1 + \cos^2\theta)}$$

...ce qui devrait converger très vite, mais laisse entier le problème du pôle.