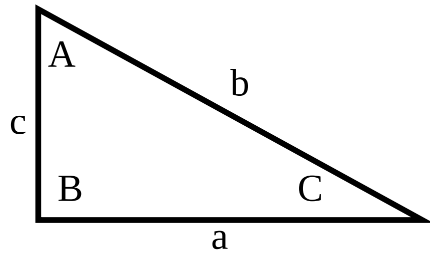
Université Paris 7 – Denis Diderot **2008-2009**

ME1 Section D **Physique première année**

TD1 - Dérivées et Primitives

Exercice 1 Triangles



1. On condidère un triangle rectangle avec $B = \pi/2$. Calculer les grandeurs manquantes connaissant :
- a et c.
- A et c.
- A et b.

2. Calculer l'aire d'un triangle quelconque connaissant :
- a, b et C.
- a, A et B.

Exercice 2 Dérivées

1. Donner l'allure et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

x^2, x^3, $e^{\alpha x}$, $e^{-t/\tau}$, $\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $\ln(x)$.

$\sin(x)$**,** $|\sin(x)|$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cos^2(x)$.

2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$\sin(x)\,\cos(x)$, $x\,\tan(x)$, $a\,x^5\,\cos(x)$, $e^{\alpha x}\,\sin(x)$.

$\left(1+x^2\right)^{3/2}$, $\dfrac{1}{\log(x)}$, $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, $\dfrac{\sin^3(x)}{x}$.

$\sin(\omega t)$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 3 Optimisation

1. On considère un rectangle de périmètre imposé p. Déterminer la longueur des cotés qui rendent son aire maximale.

2. On considère un cylindre de volume fixé. Quelles doivent être ses dimensions pour que sa surface totale soit minimale (surface latérale et deux couvercles) ?

3. Sur une plage, le passage du sable à l'eau est rectiligne. Tout le monde, que ce soit dans la mer ou sur la plage, se trouve du même côté d'une jetée, perpendiculaire au rivage. Une personne qui se baigne appelle à l'aide. Elle se trouve à la distance d_1 de la jetée et h_1 de la côte. Le maître nageur se trouve sur la plage, à la distance d_2 de la jetée et h_2 du bord de la mer.
Le maître nageur peut courir sur le sable à la vitesse v_2, et nager dans la mer à la vitesse v_1. A quelle distance de la jetée doit-il entrer dans la mer pour atteindre le nageur en un minimum de temps.

Exercice 4 Primitives

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

x^α, $e^{\alpha x}$, $\sin(x)$, $\tan(x)$.

Université Paris 7 – Denis Diderot **2008-2009**

ME1 Section D **Physique première année**

TD2 - Différentielles

Exercice 1 Différentielles

1. Ecrire la différentielle des fonctions suivantes :

$$y = a\,e^{-\alpha t},\ y = a\,e^{-\alpha t}\ \sin\omega t,$$
$$y = \frac{a}{\sqrt{x^2+b^2}},\ y = a\ \log\left(\frac{t}{\tau}\right),\ y = a\ \ln\left(\frac{t^2+2\alpha t}{\tau^2}\right).$$

2. Calculer la dérivée de $\arctan(x)$.

Exercice 2 Fonctions de plusieurs variables

Calculer les dérivées partielles du premier ordre et la différentielle des fonctions suivantes :

$$g(x,y) = x+y,\ g(x,y) = x\,y,\ g(x,y) = \frac{x}{y},$$
$$g(x,y) = \ln(x+y),\ g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$g(r,\phi) = r\ \ln(\phi),\ g(r,\phi) = \frac{e^{i\phi}}{r},$$
$$g(x,y,z) = x\,y\,z,\ g(x,y,z) = x^2\,e^y + z,\ g(r,\theta,\phi) = r\ \cos^2\theta\ \sin\phi.$$

Exercice 3 Calcul des dérivées des fonctions composées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\ln(\sin\ x),\ \ln\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right],\ \exp\left[\cos\left(\ln\ x\right)\right],\ \ln\left[1+\tan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^\alpha$$

Exercice 4 Calcul d'intégrales par changement de variables ou intégration par parties

1. Par changement de variable, calculer les primitives suivantes :

$$\int e^{x^2}\,x\,dx,\ \int\cos^2 x\ \sin x\,dx,\ \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \int\cos^2 x\,dx,\ \int\cos^3 x\,dx.$$

2. En intégrant par partie, calculer :

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx,\ \int x^2\,e^{ax}\,dx,\ \int e^{\alpha x}\ \sin\omega x\,dx.$$

Exercice 5 Développements limités

Si on connait la valeur d'une fonction $f(x)$, ainsi que celle de ses dérivées, pour une valeur x_0 de la variable, la "formule de Taylor" donne un développement qui permet de trouver la valeur de $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + ...$$

On peut en tirer les "Développements limités" à l'ordre n, au voisinage de x_0.

1. En choisissant $x_0 = 0$, écrire (à tous les ordres) le développement de e^x, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^n$. Ces développements sont à connaître par coeur.

2. En écrivant $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, retrouver les développements limités de $\sin x$ et de $\cos x$ au voisinage de 0 à partir du développement de l'exponentielle. Ces développements sont à savoir par coeur jusqu'au troisième ordre.

3. Développer :

$\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ $(0 < x \ll 1)$, au deuxième ordre en x.

$\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}$ $(0 < x \ll a)$, au deuxième ordre en $\frac{x}{a}$

Exercice 6 Calculs approchés

1. On augmente le rayon d'un cercle de 1 %. De combien augmente son périmètre ?

2. On augmente la vitesse v d'un mobile de 10 %. De combien varie son énergie cinétique ?

3. Calculer : $\ln(1.1)$, $\sin(88^\circ)$, $e^{1.2}$.

Exercice 7 Problème à rédiger à la maison et à rendre

1. Calculer les primitives suivantes :

a. Par changement de variables :

$$\int \cos 3x\, dx, \quad \int \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\, dx, \quad \int \sin^2 x\, \cos^3 x\, dx.$$

b. Par intégration par parties :

$$\int \ln x\, dx, \quad \int \ln^2 x\, dx.$$

c. A vous de voir :

$$\int 3^x\, e^x\, dx, \quad \int \left(a + b\, x^3\right)^2\, dx, \quad \int \sin(4x)\, dx, \quad \int \sin^4 x\, dx.$$

$$\int x\,\left(5x^2-3\right)^7\,dx, \quad \int x\,(1+x)^{-1/2}\,dx, \quad \int \frac{\cos\,x}{(1+\sin\,x)^{1/2}}\,dx.$$

2. Calculer les développements limités suivants :

- $\ln x$, au voisinage de 3 à l'ordre n.
- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, au voisinage de ∞ à l'ordre n.
- $\sin x\, e^x \,\frac{\cos\,x}{1+x}$, au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- $\tan x$, au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Université Paris 7 – Denis Diderot **2008-2009**

ME1 Section D **Physique première année**

TD3 - Hydrostatique

Quelques masses volumiques (en $\mathrm{kg\,m^{-3}}$)

air	1.3	fer	$7.8\,10^3$
aluminium	$2.7\,10^3$	glace	$0.92\,10^3$
cuivre	$8.9\,10^3$	huile	$\simeq 0.7\,10^3$
eau douce	$1.00\,10^3$	mercure	$13.6\,10^3$
eau de mer	$1.03\,10^3$	or	$19.3\,10^3$
éthanol	$0.81\,10^3$	plomb	$11.3\,10^3$

1. Un parallélépipède rectangle d'un corps non identifié a les dimensions suivantes (en centimètres) : $5\times15\times30$. Sa masse est de 2.5 kg. Quelles est sa masse volumique moyenne ? Que vaut sa densité ?

2. Pour fabriquer un baromètre, on remplit un tube de mercure et on le renverse sur une cuve ouverte, contenant elle aussi du mercure. A quelle pression correspond une dénivellation de 75 cm entre la surface du mercure dans la cuve et celle dans le tube ?

3. A quelle distance au-dessous du niveau de la mer la pression est elle égale au double de la pression atmosphérique ?

4. Une cloche de plongée est destinée à descendre à une profondeur de 900 m. A cette profondeur, quelle est la force qui s'exerce sur un hublot circulaire de 15 cm de diamètre ?

5. Un tonneau ouvert contient une couche de 20 cm d'huile flottant sur 30 cm d'eau.

a. Quelle est la pression à l'interface entre l'eau et l'huile ?

b. Quelle est la pression au fond du tonneau ?

6. Un vérin hydraulique est constitué de deux conduits verticaux de section carrée remplis d'eau, qui communiquent dans la partie inférieure par un tube horizontal de faible diamètre. Un piston d'entrée (côté 40 cm) et un piston de sortie (1m de côté) reposent sur les surfaces libres de l'eau.

a. Une force de 5000 N est appliquée au piston de sortie. Quelle force doit-on appliquer au piston d'entrée pour que les deux pistons restent au même niveau ?

b. On place une voiture de 500 kg sur le piston de sortie. De quelle hauteur faut-il baisser le piston d'entrée pour élever la voiture de 2 m ?

7. A quelle altitude (par rapport à la rue de la ville) doit se trouver le niveau de l'eau dans un château d'eau pour que, au cinquième étage d'un immeuble, la surpression au robinet soit égale à 1 atmosphère. Quelle est alors la surpression au robinet du rez de chaussée ?

8. Un tube en U aux extrémités ouvertes sur l'atmosphère contient de l'eau. La section du tube est constante et vaut $1\,\mathrm{cm}^2$. On ajoute dans une des branches $10\,\mathrm{cm}^3$ d'huile : toute l'huile se trouve dans une branche verticale du tube. Quelle est la différence de niveau entre les surfaces libres des deux branches du tube ?

9. Un récipient parallélépipédique ($L = 0.75\,\mathrm{m}$, $l = 0.5\,\mathrm{m}$ et $H = 0.4\,\mathrm{m}$) est surmonté de trois tubes ouverts, chacun de section $s = 25\,\mathrm{cm}^2$. On a versé 2091 kg de mercure.

a. Déterminer la force de pression qui s'exerce sur le fond du récipient. Est-elle égale au poids du mercure ?

b. Déterminer la force de pression qui s'exerce sur la paroi horizontale supérieure du récipient.

10. A la maison On reprend le récipient de mercure à trois tubes de l'exercice précédent. Dans le premier tube on ajoute 40 cm d'eau, dans le deuxième 39.1 cm d'essence, dans le troisième 42.9 cm d'acide. On s'aperçoit alors que les trois niveaux libres dans les tubes (eau, essence, acide) sont tous dans le même plan horizontal. Déterminer les masses volumiques de l'essence et de l'acide.

11. Comparer les poussées d'Archimède exercées sur un même corps selon qu'il est immergé dans l'air ou dans l'eau.

12. Quelle est la poussée d'Archimède qui s'exerce sur vous personnellement lorsque vous flottez dans un lac d'eau douce ? dans la mer ? dans la mer Morte ? En fait, qu'est-ce qui varie d'un cas à l'autre ?

13. Un cube de glace flotte sur de l'eau douce.

a. Quelle est la proportion de sa hauteur qui se trouve dans l'eau ?

b. Quel doit être le volume minimum de ce cube pour qu'un homme de 70 kg puisse se tenir dessus sans avoir l es pieds trempés ?

14. Chercher à la maison, discuter ensuite.

Un glaçon flotte dans un verre. On augmente la température, ce qui fait fondre le glaçon.

a. Le niveau de l'eau dans le verre va-t-il baisser, rester identique ou monter ?

b. Pourquoi dit-on que le réchauffement de la Terre va faire monter le niveau des océans ?

15. Chercher à la maison, discuter ensuite.

Un bateau flotte dans un bassin. Dans la cargaison du bateau, on prend un gros bloc de fer et on le jette dans l'eau. Le niveau de l'eau dans le bassin va-t-il baisser, rester identique ou monter ?

16. Un flotteur est constitué d'un cylindre de section S et de hauteur totale h. Sa partie supérieure est enbois (masse volumique ρ), sa partie inférieure est une rondelle de plomb d'épaisseur e. Quelle doit être l'épaisseur e pour que, lorsque le flotteur est placé verticalement dans l'eau (masse volumique ρ_0), sa partie non immergée ait une hauteur égale à $h/10$? A.N. $h = 10\,\mathrm{cm}$, $\rho = 0.8\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.

17. Un cube de cuivre de côté égal à l flotte dans du mercure. On verse de l'eau sur le mercure. Quelle doit être l'épaisseur de la couche d'eau pour que sa surface soit exactement au niveau du bloc de cuivre ?

18. Un ballon est constitué d'une enveloppe étanche à laquelle est suspendue une charge. La charge totale (charge + enveloppe) a une masse $M = 200\,\mathrm{kg}$. Initialement, l'enveloppe est entièrement dégonflée ; on la gonfle avec de l'hélium (masse volumique $\rho = 0.18\,\mathrm{g\,l^{-1}}$). A partir de quel volume de gaz introduit dans l'enveloppe le ballon commencera-t-il à s'élever ? (On négligera le volume de la charge par rapport au volume de l'enveloppe gonflée).

19. Chercher à la maison, discuter ensuite.

Sur le plateau d'une balance, on place un récipient contenant de l'eau (masse totale du récipient et de l'eau : $M = 10\,\mathrm{kg}$) et une potence pesant $m' = 2\,\mathrm{kg}$, à laquelle est attaché (par une ficelle de masse et de volume négligeables) un cube de cuivre, de de côté $l = 10\,\mathrm{cm}$.

Dans un premier temps, le cube pend dans l'air. Dans un deuxième temps, le cube est entièrement immergé dans l'eau, sans reposer au fond du récipient.

a. Quelle est la variation de l'indication de la balance lorsque l'on immerge le cube dans l'eau ?

b. Même question que précédemment, lorsque la potence n'est plus posée sur le plateau de la balance, mais sur la table ; le récipient d'eau étant toujours posé sur le plateau de la balance.

c. Même question, mais cette fois le cube est attaché sous le plateau de la balance et le récipient d'eau est posé sur la table.

d. Pour les trois questions précédentes, déterminer la tension de la ficelle qui sert à attacher le cube, lorsque le cube est dans l'air, puis lorsqu'il est dans l'eau.

20. Un bloc d'alliage d'or et aluminium a une masse $4.5\,\mathrm{kg}$. Le bloc, suspendu sous le plateau d'une balance est immergé dans un récipient d'eau : l'indication de la balance est alors $3.4\,\mathrm{kg}$. Quelle est la masse de l'or contenu dans le bloc ?

TD4 - Intégrales définies

Utilisation des intégrales définies en physique

On rappelle que lorsqu'une des dimensions d'une surface est infinitésimale, on calcule son aire comme s'il s'agissait d'un rectangle (même s'il s'agit d'un trapèze). Cela correspond à un calcul au premier ordre par rapport à la longueur infinitésimale.

De même, lorsqu'une des dimensions d'un volume est infinitésimale, on calcule la valeur d'un volume comme s'il s'agissait d'un parallépipède rectangle, même s'il s'agit d'un tronc de cône : (aire de la base $\times$ hauteur).

1. Calculer la force de pression exercée par l'eau sur le barrage qui la retient lorsque le barrage a la forme d'un triangle isocèle pointe en bas, la dimension de la base est a et celle de la hauteur est b. La hauteur d'eau retenue par le barrage est h.

2. Un mur de hauteur H, épaisseur e et largeur D est construit avec des matériaux de masse volumique variable. A l'altitude z, la masse volumique est $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\dfrac{z}{a}\right)$. On rappelle que pour élever, de façon réversible, une masse dm du sol jusqu'à l'altitude z, il faut dépenser un travail $dm\, gz$.

Calculer le travail nécessaire pour construire le mur.

3. Calculer le travail nécessaire pour construire une pyramide dont la base est un carré de côté a et dont la hauteur est h. Exprimer en fonction de la masse de la pyramide.

4.

a. Le canal de Panama débouche sur l'océan par une dernière écluse. Les portes de l'écluse, de hauteur H et de largeur totale L sont fermées, retenant de l'eau de mer (masse volumique ρ_m), côté océan. La hauteur d'eau de mer le long des portes de l'écluse est égale à h. On se place de façon telle que l'océan est à droite des portes et le canal à gauche.

Déterminer la force totale exercée sur le côté droit des portes.

b. On remplit l'écluse d'eau douce (masse volumique ρ_0), jusqu'à ce qu'il devienne possible d'ouvrir les portes, c'est-à-dire jusqu'à ce que la somme de toutes les forces qui agissent sur les portes soit nulle. La hauteur d'eau douce le long des portes est alors égale à h'.

Donner en fonction de h' la force exercée sur le côté gauche des portes.

Déterminer la valeur de h' telle que les portes peuvent s'ouvrir.

On écrira la masse volumique de l'eau de mer sous la forme :

$$\rho_m = \rho_0\,(1+\epsilon) \qquad\qquad \epsilon \ll 1$$

Donner h' en fonction de h sous forme d'un développement limité au premier ordre en ϵ.

Application numérique $L = 50\,\mathrm{m}$, $h = 30\,\mathrm{m}$. Masse volumique de l'eau de mer $\rho_m = 1.05\,10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Déterminer $h' - h$.

TD5 - Hydrodynamique

1. On remplit une bouteille d'eau de 1.5 l, en introduisant dans le goulot (diamètre intérieur 1.5 cm), un tuyau de diamètre extérieur 1.4 cm (On veillera à ne pas confondre rayon et diamètre). La bouteille est remplie en 15 secondes, et elle déborde. Jusqu'à quelle hauteur au-dessus de la bouteille monte le jet de l'eau qui déborde ?

2. Faire à la maison

Une seringue est constituée d'un réservoir et d'une aiguille. Le réservoir est un cylindre de 1 cm de rayon et de 10 cm de long. Le conduit qui se trouve à l'intérieur de l'aiguille a un rayon de un dixième de millimètre. On pousse le piston qui se trouve dans le réservoir avec une vitesse de 2 centimètre par seconde.

Quelle est la vitesse du liquide à la sortie de l'aiguille ?

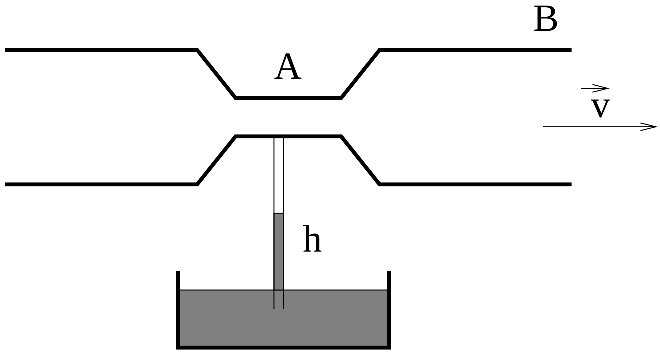
3. Tube de venturi

Montrer que dans le tube à section circulaire (figure 1), on observe une dépression à l'endroit de la diminution de section.

Ecrire la relation entre la hauteur de mercure et la vitesse v de l'eau dans la partie large du tube :

On prendra $S_B = 4\,\text{cm}^2$, $\dfrac{S_B}{S_A} = 10$.

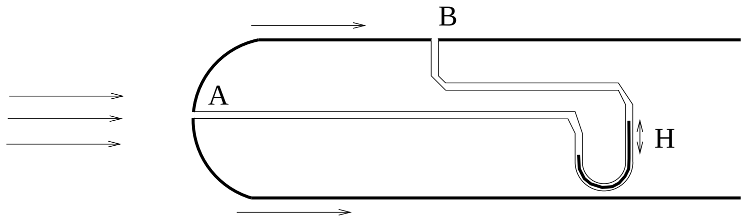
Déterminer h lorsque le débit d'eau est de 24 l par minute.



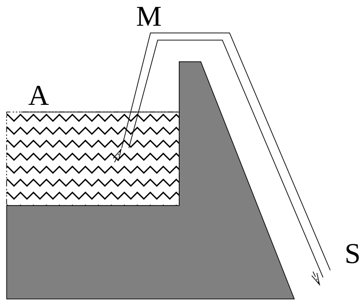
4. Tube de Pitot

Le tube de Pitot, que l'on trouve sur le fuselage des avions, est un dispositif qui permet de mesurer la vitesse relative de l'avion par rapport à l'air (vois schéma). Le principe consiste à mesurer la différence de pression entre la ligne d'arrêt (point A, $v = 0$) et un point B situé sur le coté du tube, par exemple en lisant la dénivellation H entre les deux surfaces de mercure dans un tube en U rempli avec du mercure. En calculant cette différence de pression de deux manières différentes, exprimer v_0 en fonction de H.

A.N : $H = 10\,\text{cm}$ Déterminer v_0.



5. Un siphon doit permettre l'écoulement de l'eau contenue dans un réservoir. Il est constitué d'une conduite, de diamêtre uniforme $D = 10\,\mathrm{cm}$, qui s'élève jusqu'à $h = 4\,\mathrm{m}$ au dessus de la surface libre de l'eau du réservoir. Dans cet avant projet, on se permet bien sûr de négliger tous les effets de viscosité de l'eau.



a. On suppose que l'eau s'écoule à la vitesse v. Quelle est la pression dans la partie haute du syphon ?

b. Pour ne pas que l'eau se vaporise en formant des bulles (cavitation), la pression ne doit s'annuler en aucun point du syphon. Quel débit maximal peut-on espérer obtenir dans le siphon ?

A quelle distance au dessous du niveau de l'eau du réservoir doit alors se trouver l'extrémité aval de la conduite ?

6. Un tonneau se vide par un petit trou, de section s, situé à une hauteur h en dessous de la surface libre du liquide dans le tonneau. Cette surface libre a une section S. Tout en supposant l'écoulement stationnaire (la hauteur h varie peu pendant le temps d'observation), déterminer la vitesse du jet à la sortie du trou en fonction du rapport des sections s et S.

7. Un bateau vient de heurter un rocher qui a fait un trou dans sa coque, à la distance h de la ligne de flottaison : l'eau pénètre ainsi à l'intérieur du bateau à un endroit qui se trouve à l'air libre.

a. Quelle est la vitesse de l'eau qui pénètre dans le bateau ?

b. La surface du trou est égale à s. Quelle est la masse d'eau qui pénètre dans le bateau pendant un intervalle de temps dt ?

c. Quel est le volume de bateau qui s'enfonce dans l'eau pendant un intervalle de temps dt ? Au niveau de la ligne de flottaison, l'aire du bateau est égale à A. Quelle est la variation de h correspondante ?

d. Ecrire l'équation différentielle que doit satisfaire la fonction donnannt la hauteur h en fonction du temps. Trouver sa solution par la méthode de séparation des variables.

Université Paris 7 – Denis Diderot **2008-2009**

ME1 Section D **Physique première année**

TD6 - Repérage cinématique

Les questions notées d'une * sont à faire à la maison pour vérifier que vous savez le cours.

1. * Soit un point M de l'espace. Faire un schéma permettant de retrouver simplement les relations entre coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (ρ, ϕ, z). Même question pour la relation entre coordonnées cylindriques et sphériques (r, θ, ϕ). Exprimer (x, y, z) en fonction de (r, θ, ϕ). Exprimer r en fonction de (x, y, z).

2. * Déterminer les coordonnées cylindriques du point M de coordonnées cartésiennes $(1, \sqrt{3}, 2)$.

3. * Déterminer les coordonnées sphériques du point N de coordonnées cartésiennes $(2, \sqrt{6}, \sqrt{6})$.

4. * Déterminer les coordonnées cartésiennes et cylindriques du point de coordonnées sphériques $(1, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{2})$.

5. * Décrire les surfaces $z = cte$, $\rho = cte$, $r = cte$, $\theta = cte$, $\phi = cte$.

6. * Décrire les courbes (z et ρ ctes, z et ϕ ctes, ρ et ϕ ctes).

7. * Décrire les courbes (r et θ ctes, r et ϕ ctes, θ et ϕ ctes).

8. Calculer les éléments de longueur sur toutes les courbes décrites ci-dessus lorsque la troisiême variable varie.

9. Calculer l'élément de surface sur une sphère de rayon r. Sur un plan horizontal de cote z (en cylindriques et en cartésiennes).

10. Déterminer l'élément de volume du “cube” élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées.

11. * Les vecteurs unitaires de la base locale associée aux coordonnées cartésiennes varient-il d'un point à l'autre ?

12. * Quels vecteurs unitaires de la base locale associée aux coordonnées cylindriques varient lorsqu'on passe d'un point à un autre de façon que

a. Seul ρ varie ?
b. Seul ϕ varie ?
c. Seul z varie ?

13. Donner les composantes cartésiennes, cylindriques et sphériques du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base locale associée au point M.

14. Exprimer les vecteurs $\hat{u}_\rho, \hat{u}_\phi, \hat{u}_z$ dans la base $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$, d'abord en fonction de (ρ, ϕ, z) puis de (x, y, z).

15. Exprimer les vecteur $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\phi$ sur la base $(\hat{u}_\rho, \hat{u}_\phi, \hat{u}_z)$ correspondant au même point. Mêmes vecteurs dans la base $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$.

16. Exprimer $\hat{u}_y$ dans la base locale associée aux coordonnées sphériques.

17. On fait subir à un système d'axes orthogonaux $Oxyz$ une rotation d'angle α autour de l'axe $0z$ et on note $OXYZ$ le nouveau système d'axes.

a. Ecrire x, y, z en fonction de X, Y, Z puis X, Y, Z en fonction de x, y, z.

b. Calculer X, Y, Z pour $\alpha = 1/3$, $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$, $z = 1$. Faire une figure indiquant la position des axes et celle du point M.

18. On définit un champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ qui, à tout point $M\,(x, y, z)$ associe

$$\overrightarrow{A} = z\,\hat{u}_x - 2x\,\hat{u}_y + y\,\hat{u}_z$$

a. Dessiner $\overrightarrow{A}$ aux points de coordonnées cartésiennes $(0, 0, 2)$ et $(1, 1, 0)$.

b. Donner les composantes de $\overrightarrow{A}$ dans la base locale associée aux coordonnées cylindriques.

19. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$. Décrire leur produit scalaire et leur produit vectoriel

a. indépendamment de tout repère,

b. en fonction de leurs composantes cartésiennes.

c. Application $\overrightarrow{A} = 2\,\hat{u}_x + \hat{u}_y + 2\,\hat{u}_z$, $\overrightarrow{B} = -1\,\hat{u}_x + 3\,\hat{u}_z$.

Cinématique

20. Le long de sa trajectoire, la position d'une voiture est repérée par son abscisse curviligne s (algébrique), comptée à partir d'une origine O. A l'instant $t = 0$, la voiture se trouve en O, avec une vitesse v_0. Entre les instants 0 et τ_1, l'accélération tangentielle est nulle. Entre τ_1 et τ_2 elle vaut a_1 $(a_1 > 0)$ et entre les instants τ_2 et τ_3 elle vaut a_2 $(a_2 < 0)$.

a. Tracer le graphe de la vitesse et de la position de la voiture en fonction du temps.

b. Donner l'expression analytique de la position de la voiture au cours du temps.

21. Une particule se déplace le long d'une courbe en hélice tracée sur un cylindre dont la section droite est une ellipse. A l'instant t, la particule est au point M dont les coordonnées sont données par

$$x = b\,\cos\omega\,t$$
$$y = c\,\sin\omega\,t$$
$$z = d\,t$$

où b, c, d, ω sont des paramètres constants et positifs. Dans tout l'exercice, on exprimera les vecteurs dans la base $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ du repère cartésien.

a. Quelles sont les dimensions de b, c, d, ω ?

b. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ de la particule à l'instant t. Le mouvement est-il uniforme ?

c. Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{a}(t)$ en M.

d. Calculer la composante tangentielle $\overrightarrow{a}_T(t)$ du vecteur accélération au point M.

22. Sur la trotteuse d'une grande horloge une mouche se déplace à vitesse constante v_0 par rapport à l'aiguille, en partant du centre de l'horloge au moment où l'aiguille passe par midi. On notera ω la vitesse angulaire de l'aiguille par rapport au cadran. Les coordonnées polaires de la position M de la mouche sont par conséquent $\rho(t) = v_0\, t$ et $\varphi(t) = \omega\, t$. Dessiner l'allure de la trajectoire.

a. Calculer la vitesse et l'accélération dans le repère local associé aux coordonnées polaires. Calculer les normes de la vitesse et de l'accélération.

b. Calculer la composante tangentielle de l'accélération. Dessiner les accélérations radiale, orthoradiale, tangentielle et normale à l'instant $t = \dfrac{\pi}{4\omega}$.

23. Un point se déplace à la périphérie d'un cercle suivant la loi horaire $s(t) = at^3 + bt$. Calculer la vitesse angulaire, les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération à l'instant t.

24. Une voiture se déplace sur un circuit, sa position est repérée par son abscisse curviligne $s(t)$, comptée à partir de l'origine O. A l'instant $t = 0$, la voiture initialement immobile en O, commence à rouler avec une accélération tangentielle constante $a_1 = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$. Ecrire l'équation horaire de la voiture. Au bout de 10 secondes, l'accélération tangentielle de la voiture change et prend la valeur $a_2 = 5\,\mathrm{ms}^{-2}$. Déterminer l'équation horaire de la voiture pendant la deuxième phase du mouvement.

Exercices à rédiger à la maison

25. Déterminer la distance minimale qu'il faut parcourir pour aller de Bordeaux au Caire sachant que la col atitude de Bordeauxest 45° et sa longitude 0°, tandis que la colatitude du Caire est 60° et sa longitude 30°. On considérera que la Terre est une sphère de 6400 km de rayon et on admettra que, sur une sphère, le chemin le plus court d'un point à un autre est l'arc du grand cercle qui passe par ces points (le centre d'un "grand cercle" est le centre de la sphère). N.B. Un grand cercle est un cercle situé sur la sphère, dans un plan qui contient le centre de la sph<ère.

N.B. On rappelle qu'en géographie, la latitude est mesurée à partir du plan équatorial. C'est la "colatitude", mesurée à partir de l'axe des pôles, qui correspond à l'angle θ des coordonnées sphériques.

Suggestion : Calculer, à l'aide du produit scalaire, l'angle entre le rayon de la Terre passant par Bordeaux et celui passant par le Caire.

26. Montrer que les vecteurs

$$\overrightarrow{OA} = 3\,\hat{u}_x - 2\,\hat{u}_y + \hat{u}_z \qquad \overrightarrow{OB} = \hat{u}_x + 2\,\hat{u}_y + \hat{u}_z \qquad \overrightarrow{OC} = 2\,\hat{u}_x + \hat{u}_y - 4\,\hat{u}_z$$

forment un trièdre trirectangle. Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$.

27. Un homme court à la vitesse de $4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ vers un bus arrêté à l'entrée d'un virage de $50\,\mathrm{m}$ de rayon. Lorsque l'homme est à $10\,\mathrm{m}$ du bus, celui-ci démarre ; son accélération angulaire vaut $0.02\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$. Que valent les composantes tangentielle et normale de l'accélération du bus dans le tournant ? L'homme rattrapera-t-il son bus ?

TD7 - Lois de force et lois de Newton

1. Un enfant tire un train constitué de trois voitures identiques en exerçant sur la première une force $\overrightarrow{F}$ horizontale et constante. On néglige tous les frottements et les masses des ficelles reliant les voitures entre elles.

a. Quelle est la force exercée sur la voiture 2 par la ficelle la reliant à la première voiture ?

b. Quelle est la force exercée sur la voiture 2 par la ficelle la reliant à la troisième voiture ?

2. Un paquet de masse m_A repose sur un chariot de masse m_B qui peut rouler sur le sol. Le tout étant immobile par rapport au sol, on exerce sur le chariot une force horizontale constante $\overrightarrow{F}$.

a. Un physicien utilise pour traiter le problème un modèle dans lequel il n'y a pas de force de frottement entre le paquet et le chariot. Quelles prévisions obtient-il pour le mouvement du paquet et du chariot par rapport au sol ?

b. On réalise l'expérience et on constate que le paquet reste immobile par rapport au chariot. Quelle est l'accélération du chariot par rapport au sol ? Quelle est l'accélération du paquet par rapport au sol ? Quelle est la force qui lui communique cette accélération ?

c. Peut-on penser que le paquet restera immobile par rapport au chariot quelle que soit la force $\overrightarrow{F}$?

3. Les blocs A et B, de masses respectives m_A et m_B, sont en contact par une face verticale. Le coefficient de frottement statique des deux surfaces vaut μ_s. Le bloc A repose sur le sol.

Les deux blocs sont en mouvement et on constate que le bloc B ne tombe pas. L'accélération des deux blocs est notée $\overrightarrow{a}$.

a. Déterminer les composantes de la force exercée par A sur B.

b. Quelle est la valeur minimale $\overrightarrow{a}$ pour laquelle le bloc B ne tombe pas ?

c. En considérant qu'il n'y a pas de frottement entre le sol et le bloc A, déterminer la valeur minimale de la force $\overrightarrow{F}$ avec laquelle il faut pousser sur le bloc A pour que le bloc B ne tombe pas ?

4. Un avion vole horizontalement à la vitesse V_0. Un parchutiste se laisse tomber de l'avion. On suppose que le frottement exercé par l'air est proportionnel à la vitesse. Déterminer les composantes verticale et horizontale de la vitesse du parchutiste au cours du temps. Déterminer son équation horaire et tracer la trajectoire.

5. Un ressort sans masse (constante de rappel k, longueur à vide l_0) est suspendu verticalement ; on appelle z_0 l'abscisse de son extrémité libre lorsqu'aucune force ne lui est appliquée. On accroche un objet de masse m à l'extrémité du ressort.

a. Quelle est l'abscisse z_e de la position d'équilibre ?

b. Montrer que la somme des deux forces agissant sur l'objet lorsqu'il se trouve à l'abscisse z peut être écrite sous la forme $F_{\text{tot}} = -k(z - z_e)$.

6. On considère un satellite dont la trajectoire est circulaire. Ecrire la relation entre la vitesse et l'altitude du satellite. Quelle est l'altitude d'un satellite géostationnaire ? (préciser si vous appelez altitude la distance au centre de la Terre ou à sa surface). Peut-on placer un satellite géostationnaire au-dessus de la Bretagne ?

7. Un pendule est constitué d'une bille ponctuelle de masse m, accrochée à une ficelle sans masse, de longueur ℓ, pivotant autour du point O. La ficelle étant tenue horizontale, on lâche la bille sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse de la bille, l'accélération normale et la tension de la ficelle lorsque le pendule fait un angle de 30° avec la verticale. (On utilisera le théorème de l'énergie cinétique).

8. Un petit esquimau glisse sans frottement depuis le sommet de son igloo sphérique qu'il quitte sans vitesse initiale. En supposant que l'esquimau reste bien sur l'igloo, calculer sa vitesse quand il se trouve au point M repéré par l'angle θ. (On utilisera le théorème de l'énergie cinétique.) Déterminer la réaction normale de l'igloo sur l'esquimau etmontrer qu'elle s'annule pour une certaine valeur θ_l de θ. Décrire sans calcul la trajectoire ultérieure de l'esquimau.

9. On accroche au plafond une ficelle sans masse de longueur l, à laquelle est attachée un objet de masse m, portant une charge q. Cet objet chargé se trouve entre les plaques d'un condensateur, c'est à dire dans une région où existe un champ électrique horizontal, constant, de norme E.

Déterminer, à l'équilibre, l'angle α_0 que fait la ficelle avec la verticale.

Décrire de façon qualitative le mouvement de l'objet si on le lâche sans vitesse initiale depuis une position repérée par un angle α voisin de α_0 (α repère la position de la ficelle avec la verticale).

10. Une bille pesant 10 g est suspendue à une ficelle sans masse de 10 cm de longueur.

a. Quelle est la période des oscillations de la bille dans la limite des "faibles amplitudes". Préciser ce que signifie "faibles amplitudes" ou "petites oscillations".

b. La bille est soumise à un frottement visqueux $\overrightarrow{f} = -\gamma \overrightarrow{v}$, où le coefficient de frottement γ est égal à 0.2. En écrivant l'équation du mouvement pour la bille, déterminer l'équation différentielle satisfaite par l'angle ϕ repérant la position de la ficelle. On se place dans la limite des petites oscillations. Vérifier que $\phi = A \exp(-\alpha t) \cos(\omega' t)$ est solution de cette équation différentielle et expliciter les valeurs de α et de ω'. Tracer la courbe représentant $\phi(t)$. Quel est le temps caractéristique de l'amortissement des oscillations ?

Pour les valeurs numériques données, la pseudo-période des ocsillations en présence du frottement est-elle très différente de la période trouvée à la question a ?

11. On considère un ressort vertical (constante de rappel k et longueur à vide l_0), à l'extrémité inférieure x_2 duquel est suspendue une bille de masse m. L'extrémité supérieure du ressort est déplacée au cours du temps, sa position étant donnée par l'équation $x_1(t) = a\,\cos(\omega\,t)$.

a. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par la position x_2 de la bille. Cette équation est la même que si la bille, suspendue à un ressort dont une extrémité serait maintenue immobile, était soumise à une force sinusoidale. Quelle serait l'expression de cette force.

12. Déterminer la solution permanente de l'équation différentielle. Tracer la courbe donnant l'amplitude des oscillations en fonction de ω.

13. Une partie d'un circuit automobile est un arc de cercle de rayon R. La piste est relevée, c'est-à-dire qu'elle fait un angle β avec l'horizontale. Une voiture aborde cette portion de la piste avec une vitesse de norme constante v.

a. Déterminer la réaction normale et la force de frottements exercée par la piste sur la voiture.

b. Le coefficient de frottement statique des pneus sur la piste est μ_s. Déterminer la condition sur v pour que la voiture puisse parcourir cette portion de piste sans déraper. Comparer avec le cas où la piste n'est pas

14. Exercice de partiel. Chercher à la maison

Un chien de traineau tire deux luges sur un chemin horizontal. La masse de la première luge est égale à $2m$, et celle de la seconde vaut m. La ficelle horizontale qui relie les deux luges a une masse négligeable. La force (horizontale) exercée par le chien sur la première luge est égale à $F = mg$, où g est la norme de l'accélération de la pesanteur.

a. On suppose que les deux luges glissent sans frottement sur un chemin verglacé. Déterminer la tension de la ficelle qui relie les deux luges entre elles.

b. Les luges passent sur un chemin où le frottement solide exercé par le sol n'est plus négligeable : les coefficents de frottememnt des luges sur la neige sont les mêmes pour les deux luges : $\mu_c = 0.25$ pour le frottement cinétique (ou dynamique) et $\mu_s = 0.5$ pour le frottement statique. Déterminer la tension de la ficelle qui relie les deux luges entre elles lorsqu'elles glissent sur ce chemin.

c. Pour laisser passer un troupeau, les luges s'arrêtent sur le chemin de la question b. Au moment de repartir, le chien exerce la même force $F = mg$. Cette force est-elle suffisante pour faire démarrer les luges ?

15. rédiger à la maison

On considère deux ressorts identiques, de longueur à vide l_0 de raideur k, accrochés au plafond. A l'extrémité inférieure du premier, on accroche une bille A de masse $4m$, et à l'extrémité du deuxième, une bille B de masse m.

a. Déterminer les longueurs à l'équilibre $l_e(A)$ et $l_e(B)$ de chacun de ces ressorts.

b. On oriente l'axe des z vers le bas et on choisit l'origine au plafond. Les billes sont en mouvement, quelles sont les abscisses z_A et z_B des points autour desquels ont lieu les oscillations des billes A et B ? Quelles sont les pulsations ω_A et ω_B caractérisant les oscillations de chacune des deux billes ? Pendant que la bille A effectue une période, combien de périodes effectue la bille B ?

c. Un ressort est accroché au plafond, à son extrémité inférieure est accrochée une première bille B de masse m, à laquelle est attachée par une tige sans masse une deuxième bille de masse $3m$. On tire l'ensemble des billes jusqu'à ce que l'abscisse de l'extrémité inférieure du ressort soit $z_1 = z_A + \dfrac{4mg}{k}$ où z_A est la valeur définie à la question 2.

On lâche alors les billes sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle régissant le mouvement des billes, en le caractérisant par l'abscisse $z(t)$ de l'extrémité du ressort au cours du temps, et la résoudre.

d. Déterminer la vitesse v_A des billes au moment où l'extrémité du ressort passe pour la première fois au point d'abscisse z_A et l'instant τ pour lequel cela se produit.

e. Au moment où l'extrémité du ressort passe en z_A, la tige qui maintient la deuxième bille casse, de sorte que seule la bille B de masse m reste accrochée au ressort. On cherche à déterminer le mouvement à partir de l'instant τ.

- Autour de quel point ont lieu les oscillations ?
- Quelle est la pulsation des oscillations ?
- Déterminer la fonction $z(t-\tau)$ qui donne l'abscisse de l'extrémité du ressort pour $t > \tau$, en fonction de z_A et v_A.
- Expliciter a solution en tenant compte des valeurs de v_A et z_A trouvées aux questions précédentes.

TD6 - oscillations

1. On considère un ressort sans masse (k, l_0) placé sur une table. On pose dessus un pavé, de masse m.

a. Quelle est la longueur du ressort à l'équilibre ? Quelle est la force exercée par le ressort sur la table ?

b. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par z, la cote de l'extrémité supérieure du ressort. Que valent la pulsation et la période des oscillations du ressort.

c. On enfonce le pavé jusqu'à la cote z_i et on le lâche sans vitesse initiale. Quelle est l'équation horaire du mouvement du pavé ?

2. Une bille de masse m est suspendue à une ficelle, à l'équilibre. A l'instant $t = 0$ on lui donne une pichenette ce qui lui communique instantanément une vitesse v_0, avant qu'elle ait eu le temps de se déplacer.

a. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par l'angle ϕ que fait la ficelle avec la verticale dirigée vers le bas.

b. Ecrire l'équation horaire $\phi(t)$ dans la limite des petites oscillations. Quelle est la période des oscillations ?

c. Quelle est la force exercée par la ficelle sur le clou auquel elle est accrochée quand la bille passe par sa position d'équilibre.

3. La bille précédente se déplace dans un bain d'huile : elle est soumise à une force de frottement visqueux (coefficient γ). On lâche la bille sans vitesse initiale depuis la position repérée par l'angle ϕ_0 $\quad \phi_0 \ll 1\,\text{rad}$.

a. A quelle condition la bille oscille-t-elle autour de sa position d'équilibre ? Quelle est, dans ce cas, la période (ou pseudo-période) des oscillations ?

b. Au bout de combien de temps peut on considérer que la bille est immobile ?

c. Ecrire la solution de l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales.

Problème - Le toboggan

1. Un toboggan est constitué d'une gouttière placée autour d'un cône de hauteur h, dont le demi-angle au sommet est égal à 45°. Ce toboggan est utilisé dans une piscine et un système de jets d'eau maintient en permanence de l'eau sur la piste de sorte que les enfants, glissant assis dans l'eau, sont soumis à une force de frottement visqueux.

On prend pour axe des z l'axe du cône (orienté vers le haut) et pour origine sur cet axe, le point situé à la base du cône. On choisit l'origine des temps de façon que, pour $t > 0$, les coordonnées cylindriques de la position $M(t)$ d'un glisseur sont les suivantes :

$$\rho = \ell \left(\frac{t+\tau}{\tau}\right)$$

$$\phi = \ln \left(\frac{t+\tau}{\tau}\right)$$

$$z = h - \ell \left(\frac{t+\tau}{\tau}\right)$$

où ℓ et τ sont des constantes.

2. Quelles sont les dimensions de ℓ et τ ?

3. Quelles sont les coordonnées du point M à l'instant $t = 0$?

4. Etude de la vitesse

a. Calculer, en fonction des données du problème (h, τ et ℓ) l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ dans la base locale $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\phi$, $\hat{u}_z$ au point $M(t)$.

b. Calculer la norme de $\overrightarrow{v}$; le mouvement est-il uniforme ?

5. Caractéristiques de la trajectoire.

On définit le vecteur *unitaire* $\hat{u}_T$ tangent à la trajectoire. On a donc $\hat{u}_T = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.

a. Ecrire le vecteur $\hat{u}_T$ dans la base locale.

b. Déterminer l'angle α de la trajectoire avec la verticale orientée vers le bas $-\hat{u}_z$ (On se contentera de déterminer une ligne trigonométrique de α).

c. Déterminer l'angle β que fait la trajectoire avec la droite SM, S étant le sommet du cône.

6. Etude de l'accélération

a. Calculer, en fonction des données du problème, le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ dans la base locale.

b. Que valent les accélérations tangentielle et normale $\overrightarrow{a_T}$ et $\overrightarrow{a_N}$?

c. Déterminer le rayon de courbure $\mathcal{C}$ de la trajectoire au point $M(t)$.

7. Etude des forces. L'enfant qui glisse est soumis à son poids et à une réaction totale $\overrightarrow{R}$ de la part de la piste de toboggan.

a. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{R}$ au point $M(t)$.

b. La force de frottement $\overrightarrow{f}$ est la partie de la réaction de la piste qui est colinéaire à la vitesse $\overrightarrow{v}$. Déterminer la projection de $\overrightarrow{R}$ sur le vecteur unitaire $\hat{u}_T$ et en déduire une relation entre les données du problème et le coefficient de frottement visqueux γ tel que

$$\overrightarrow{f} = -\gamma\,\overrightarrow{v}$$

8. Première phase du mouvement L'équation horaire étudiée précédemment ne correspond pas au mouvement d'un enfant dès qu'il se lâche sans vitesse initiale sur la piste du toboggan. La trajectoire est la même, les caractéristiques trouvées à la question 3 (y compris l'expression du vecteur $\hat{u}_T$) restent valables, mais la façon dont l'angle ϕ varie au cours du temps n'est a priori pas connue. L'enfant qui glisse est soumis à son poids, à une force de frottement visqueux $\overrightarrow{f} = -\gamma\,\overrightarrow{v}$, ainsi qu'à une réaction normale exercée par la piste de toboggan et dont il nous suffit de savoir qu'elle est perpendiculaire à la trajectoire.

a. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur l'axe tangent à la trajectoire, déterminer l'équation différentielle satisfaite par la célérité v :

b. Déterminer la solution $v(t)$ de cette équation en prenant l'origine des temps au moment où l'enfant se lâche en haut du toboggan.

c. Tracer la courbe $v(t)$.

d. Quelle est la durée T de la chute à partir de laquelle on peut considérer que le mouvement uniforme étudié dans la première partie du problème est atteint ? Donner en fonction de T la valeur de la vitesse v_{lim} atteinte par le glisseur.

A.N. On trouve que T est égal à 1 seconde. En déduire la valeur de v_{lim}. La masse de l'enfant est égale à 20 kg, déterminer la valeur de γ.

Problème - Le Salaire de la Peur

Dans le film “le Salaire de la Peur”, il s’agissait de transporter un explosif, en camion, sur une route déformée ("tôle ondulée"). Les héros du film ont alors le choix entre rouler tout doucement ou au contraire assez vite, sans descendre en dessous d’une certaine vitesse. Nous nous proposons de comprendre pourquoi il en est ainsi. Il se peut que vous ayez besoin de certaines données, comme la masse du camion ou le rayon de ses roues, par exemple : vous les baptiserez vous-mêmes au moment où vous les introduirez dans vos calculs.

1. Nous prenons pour le relief de la route un modèle simple : par rapport à un plan horizontal, la hauteur h de la route est donnée par la formule $h = h_0 \cos\left(2\pi \dfrac{x}{L}\right)$ où x est l’abscisse du point de la route. Le camion roule sur cette route avec une vitesse W, si bien que $x = Wt$. Ecrire l’expression de l’altitude $y(t)$ de l’essieu du camion en fonction du temps. Quelle est la fréquence de ce mouvement ?

2. Entre l’essieu et la plate-forme du camion se trouve la suspension, c’est-à-dire qu’au dessus de chaque roue se trouve un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de rappel k. On notera z l’altitude de la plate-forme du camion, qui coïncide avec l’extrémité supérieure du ressort et y l’altitude de l’essieu qui coïncide avec l’extrémité inférieure du ressort. Donner, à l’instant t, l’expression de la force exercée par le ressort sur le camion, en fonction des altitudes $z(t)$ et $y(t)$. La suspension des véhicules est calculée pour que, lorsque la voiture est à l’arrêt, la période de ses oscillations verticales, T_0, soit de l’ordre de 1 seconde (vous ne voyez pas en général ces oscillations car elles sont très efficacement amorties par les “amortisseurs”) : si le camion et son chargement ont une masse de 8 tonnes, quelle est l’ordre de grandeur de la constante de rappel de chaque ressort ?

3. Le camion du film, vieux et abîmé, n’a pas d’amortisseurs. Néanmoins l’air exerce sur la plate-forme du camion une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse de déplacement de la plate-forme (coefficient de proportionnalité γ). Le camion étant à l’arrêt, on constate que l’amplitude de ses oscillations verticales est divisée par 2,7 en une seconde. En déduire la valeur de γ/m.

4. Pour une valeur W de la vitesse (horizontale) du camion et en tenant compte de la forme particulière de l’altitude de la route, précisée à la première question, écrire l’équation différentielle régissant la position $z(t)$ de la plate-forme. On écrira cette équation différentielle en utilisant les notations suivantes : ω_0 = pulsation propre des oscillations verticales du camion, en absence d’amortissement τ = temps caractéristique de l’amortissement des oscillations verticales du camion (oscillations en $\exp(-t/\tau)$.

5. Donner l'expression de la solution permanente de l'équation différentielle trouvée ci-dessus. Tracer la courbe représentant l'amplitude Z des oscillations en fonction de la vitesse (horizontale) W du camion. Donner l'expression de la vitesse (verticale) et de l'accélération (toujours verticale) de la plate-forme. Tracer les amplitudes V de la vitesse et A de l'accélération en fonction de W. (L'amplitude est la valeur maximale atteinte par la quantité considérée au cours des oscillations.) Pour quelle valeur de la vitesse horizontale W l'amplitude Z est-elle maximum ? Mêmes questions pour V et A ? S'agit-il exactement de la même valeur dans les trois cas ? Dans la suite on appellera "résonance" la situation où l'amplitude de la *vitesse* est maximale. A.N. Pour $h_0 = 10\,\text{cm}$, $L = 3\,\text{m}$, $T_0 = 1\,\text{s}$ et $t = 1\,\text{s}$, déterminer la vitesse horizontale W_r du camion correspondant à la résonance. Calculer l'amplitude des oscillations de la vitesse et de l'accélération pour cette valeur W_r de la vitesse. Calculer pour quelle valeur W de la vitesse l'amplitude des oscillations de la plate-forme devient égale à $5\,\text{cm}$.

6. Le danger pour la cargaison d'explosif, qui est simplement posée sur la plate-forme du camion, vient de ce qu'elle peut décoller de la plate-forme, ce qui n'est pas trop grave en soi, mais après elle finit par se recoller, de façon qui peut être brutale. Pour quelle valeur de l'accélération du camion le chargement décolle-t-il de la plate-forme ? En utilisant la question (e), déterminer graphiquement les valeurs de la vitesse W auxquelles le camion peut rouler sans mettre en danger son chargement.

N.B. : La présence de vrais amortisseurs diminue les valeurs des amplitudes du déplacement, de la vitesse, et de l'accélération à la résonance. Mais elle augmente beauoup la valeur de la vitesse pour laquelle l'amplitude des oscillations devient inférieure à $5\,\text{cm}$.

NB : On pourra faire les calculs numériques de façon approchée.

Deuxième session d'examen (19 juin 2008)

Exercice 1 Spirale logarithmique

On étudie le mouvement d'un point mobile M qui se déplace dans le plan $z = 0$, suivant l'équation horaire

$$\begin{cases} \rho(t) = \ell_0 + b\,t \qquad (b > 0) \\ \phi(t) = \pi\ \ln \frac{\ell_0 + bt}{\ell_0} \end{cases}$$

où ℓ_0 et b sont des constantes.

1. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base locale $(\hat{u}_\rho,\ \hat{u}_\phi)$.

2. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et sa norme. Le mouvement est-il uniforme ?

3. Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ et sa norme.

4. Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire au point $M(t)$.

5. Sur une figure, placer le point M à l'instant $t = 0$, et dessiner les vecteurs vitesse et accélération en ce point.

Quelle est la valeur de ρ lorsque ϕ est égal à π ?

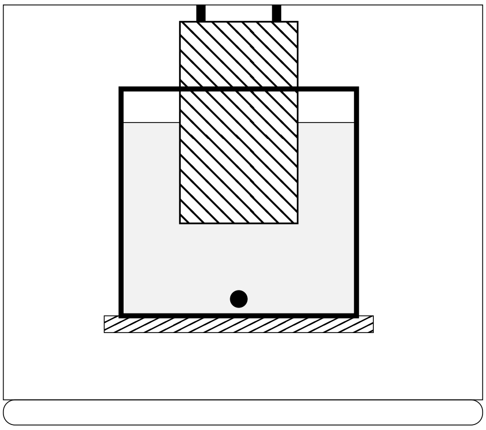
6. Déterminer l'équation de la trajectoire $\rho = \rho(\phi)$.

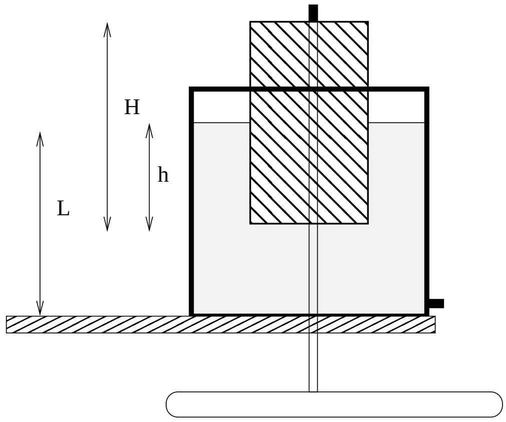
Dessiner l'allure de cette trajectoire.

Exercice 2 Flotteur

Ce problème comporte peu de calculs, mais plusieurs questions demandent une réponse "qualitative", une explication. Celle-ci doit être courte et précise. Montrez que vous avez compris, mais ne nous infligez pas une rédaction. Il y a très peu d'applications numériques (indiquées par : A.N.) : ne faite que celles qui sont demandées (utilisez le tableau sous la figure). En revanche, donnez systématiquement toutes les réponses sous une forme littérale. Les questions 2, 3 et 4 sont largement indépendantes.

Une cuve cubique est posée à l'extrémité d'une planche. Elle contient de l'eau (masse volumique ρ_0). On y plonge un flotteur cylindrique auquel est accroché un plateau à l'aide d'un cadre. Grâce au cadre qui passe autour de la cuve, le plateau peut être placé sous la cuve. Le flotteur, le cadre et le plateau sont complètement rigides et n'ont aucun contact avec la cuve ou la planche. La figure ci-dessous montre le dispositif de face et de coté.





H	ρ_f	ρ_0	M	S	L	r	l
40 cm	$0.5\,10^3$ kg m^{-3}	10^3 kg m^{-3}	1 kg	0.01 m^2	80 cm	1 mm	1 cm

1. La masse de l'ensemble "cadre + plateau" est M, la surface de la base du flotteur est S et sa hauteur totale H. La masse volumique du flotteur est ρ_f. Quelle est la hauteur immergée h ? A.N.
La hauteur d'eau dans la cuve est alors L.

2. Un robinet situé tout en bas de la cuve permet de faire couler de l'eau dans le plateau. On l'ouvre quelques secondes pour laisser couler un volume V qui reste dans le plateau.

a. Quelle est l'augmentation de masse ΔM de l'ensemble "cadre + plateau + eau" ?

b. Quel volume supplémentaire de flotteur doit être immergé pour que la système reste à l'équilibre ?

c. Quelle est la variation de hauteur de l'eau dans la cuve ?

d. Que se passe-t-il si on laisse le robinet ouvert ? Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

3. On laisse justement le robinet ouvert. Le rayon de son trou est r.

a. Rappeler les conditions d'application du théorème de Bernoulli.

b. Calculer la vitesse v_e de l'eau à la sortie du robinet.

c. Quel est le débit D de l'eau ? A.N.

d. Combien de temps faut-il pour que le flotteur touche le fond de la cuve ?

e. Que se passe-t-il à partir de ce moment là ?

4. On remet le dispositif dans ses conditions initiales. A l'équilibre, on fait une petite marque sur le flotteur au raz de l'eau. La position de cette marque est ensuite repérée par son abscisse z suivant un axe dont l'origine est au raz de l'eau et orienté vers le bas.
Par rapport à sa position d'équilibre initiale (plateau vide, robinet fermé), on enfonce le flotteur d'une petite hauteur supplémentaire z et on le relâche sans vitesse initiale.

a. Décrire qualitativement le phénomène observé.

b. Quelle est la force supplémentaire s'appliquant sur le dispositif pour une valeur de z ?

c. Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

d. En déduire la période τ des oscillations. A.N.

5. On ouvre maintenant le robinet. Décrire qualitativement ce que l'on observe.

Université Paris 7 – Denis Diderot **2008-2009**

ME1 Section D **Physique première année**

Partiel du 10 Novembre

N.B. Il peut y avoir dans les énoncés des données qui finalement ne servent pas.

Exercice 1 Talus

Pour élever un talus de hauteur h entre deux champs, on utilise un mélange de graviers et de terre. Il y a plus de graviers vers le bas et plus de terre vers le haut, ce qui fait que la masse volumique du mélange dépend de la hauteur z au dessus du sol suivant l'expression :

$$\rho(z) = \rho_1 \frac{z}{h} + \rho_2 \frac{h-z}{h}$$

Le talus a un profil de triangle isocèle de base a, et une longueur totale L.

1. Quelle est la largeur $l(z)$ du talus à une hauteur z ?

2. Calculer la masse totale M du talus.

Exercice 2 Île flottante

1. Un pâtissier pointilleux souhaite réaliser une île flottante « parfaite ». Selon lui, ce dessert est bien réussi lorsque la moitié seulement du volume des œufs à la neige est immergé dans la crème anglaise. Sachant que la masse volumique des œufs à la neige est ρ_1 quelle devra être la masse volumique de la crème anglaise préparée par notre chef ? A.N. $\rho_1 = 0,63\,10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

2. L'aide pâtissier veut améliorer l'aspect du dessert. Pour cela il ajoute sur un volume V_1 d'oeufs à la neige proprement dit, un volume V_2 de caramel, de masse volumique $\rho_2 = 3\rho_1$, de façon que 3/5 du volume total de l'île soit immergé dans la crème anglaise. Déterminer la proportion V_2/V_1.

Exercice 3 Vases communicants

Un vase est constitué d'un parallélépipède rectangle en verre de longueur L, largeur l et épaisseur e_1. Le rectangle supérieur est percé de trois trous circulaires, de surfaces respectives s_1, s_2 et s_3, dans lesquels sont ajustés trois cylindres verticaux. On remplit ce vase d'eau : chaque tube contient alors une hauteur e_2 d'eau.

1.

a. Quelle est la force exercée par l'eau sur le fond horizontal du vase ? Est-elle égale, inférieure ou supérieure au poids de l'eau contenue dans le vase ?

b. A.N. $L = 20\,\mathrm{cm}$, $l = 5\mathrm{cm}$, $e_1 = 5\,\mathrm{cm}$, $s_1 = s_2 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $s_3 = 1\,\mathrm{cm}^2$; $e_2 = 3\mathrm{cm}$.

2. On ajoute dans le premier tube de l'huile, de masse volumique $\rho_1 = 0,8\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, qui occupe dans le tube une hauteur h_1. On rajoute dans le deuxième tube une essence très légère, de masse volumique $\rho_2 = 0,4\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, non miscible avec l'eau. On verse l'essence dans ce tube jusqu'à ce que les surfaces libres de l'huile et de l'essence soient dans le même plan horizontal : l'essence occupe alors une hauteur h_2.

a. Sans calcul, dites si h_2 est supérieure ou inférieure à h_1. Expliquer pourquoi.

b. Déterminer $h_1 - h_2$. Faire l'application numérique pour $h_1 = 30\,\mathrm{cm}$.

3. Dans le troisième tube, on ne rajoute rien au dessus de l'eau. Dites comment se situe la surface libre de l'eau par rapport à la surface de contact entre l'eau et l'huile dans le premier tube (à quelle distance, au-dessus ou au-dessous). Faire l'application numérique.

Exercice 4 Arrosage

Une maison est alimentée en eau à partir d'un château d'eau. La surface libre de l'eau dans le château d'eau, d'aire S (plusieurs m^2) se trouve à la hauteur H au dessus du sol de la maison. Sur un robinet situé au point A, au ras du sol, on branche un tuyau d'arrosage, de rayon intérieur r, avec lequel on tente de laver le toit, à une altitude z. On considérera que la surface libre de l'eau dans le château d'eau est immobile.

1. Déterminer la vitesse v de l'eau lorsqu'elle sort du tuyau. (On précisera les hypothèses faites pour utiliser la loi de Bernoulli.)

2. Déterminer la pression en un point A_1, situé *dans le tuyau d'arrosage* juste à côté du robinet A.

3. À l'intérieur de la maison, le robinet est alimenté par un tuyau en cuivre de rayon intérieur r'.

a. Quelle est la vitesse v' de l'eau dans le tuyau de cuivre ?

b. Déterminer la pression en un point A_2 situé *dans le tuyau en cuivre*, juste à côté du robinet.