Corrigé de l'examen du 14 janvier 2009

Exercice 1 - Blocs inhomogènes

1. A partir de l'expression de $\rho(x)$, on voit d'abord que ρ_0 a la même dimension que ρ. En effet, le dénominateur comporte un 1 isolé, qui est sans dimension. ρ_0 est donc une masse volumique qui s'exprime en $[M]\,[L^{-3}]$ (unités S.I. : $\mathrm{kg\,m^{-3}}$). Ensuite, comme tous les termes d'une somme doivent avoir les mêmes dimensions, il faut que le terme x/a soit sans dimension comme le 1. a est donc une longueur comme x, soit en $[L]$ (unité S.I. : m).
2. Cette question était la plus difficile de tout l'examen, car elle demandait de penser seul à plusieurs étapes intermédiaires pour pouvoir répondre à la question. Si le bloc est en équilibre, alors la somme des forces extérieures est nulle. Or il n'y a que deux types de forces qui s'appliquent sur le solide :
   - Une force en volume, le poids : $\overrightarrow{P}_d$.
   - Des forces de surface, résultant des forces de pression sur les parois : $\overrightarrow{\Pi}$.

   Pour pouvoir calculer le poids, il faudra calculer la masse m du solide, ce qui nécessite d'écrire une intégrale puisque sa masse volumique est variable. En revanche, la résultante des forces de pression sera plus simple à obtenir grâce au théorème d'Archimède.

$$m = \int_0^{h_0} \rho(x)\, L^2 dx = \rho_0\, L^2 \int_0^{h_0} \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2}$$

   où l'on a dit que la masse d'une tranche du solide de surface de base L^2 et d'épaisseur dx située à une hauteur x au dessus du fond du cylindre est :

$$dm = \rho(x)\, L^2\, dx$$

   Toutes ces masses élémentaires étant sommées depuis le fond ($x = 0$) jusqu'au sommet ($x = h_0$). On trouve finalement :

$$m = \rho_0\, L^2 \left[a\, \frac{-1}{1+\frac{x}{a}}\right]_0^{h_0} = \rho_0\, L^2\, h_0\, \frac{a}{a+h_0}$$

   Le volume du cylindre étant $L^2\, h_0$, on peut maintenant écrire que la somme des forces extérieure est nulle :

$$\overrightarrow{P}_d + \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$$

Soit :

$$m\,g = \rho_{eau}\,L^2 h_0\,g$$

En remplaçant m par l'expression calculée et en simplifiant, on trouve :

$$h_0 = a\left(\frac{\rho_0}{\rho_{eau}} - 1\right)$$

Comme on sait que $\rho_0 > \rho_{eau}$, cette quantité est bien positive.

3. Comme déjà dit dans le corrigé du partiel (même question exactement), la poussée d'Archimède ne dépend pas de la position dans l'eau, et évidemment le poids non plus ! Les forces extérieures restent les mêmes, leur somme reste donc nulle, et donc il ne se passe rien. Le solide reste en équilibre là où on le met. C'est ce qu'on appelle un équilibre indifférent.

Exercice 2 - Remplissage d'un tonneau

1. On est dans les conditions standards d'application du théorème de Bernoulli (voir le poly de cours). On choisit donc une ligne de courant qui va de la surface de la citerne (supposée grande – point A) au fond du tonneau, à la sortie du tuyau (point B). On a, avec les notations habituelles :

$$P_A + \frac{1}{2}\,\rho\,V_A^2 + \rho\,g\,h_A = P_B + \frac{1}{2}\,\rho\,V_B^2 + \rho\,g\,h_B$$

   En prenant un repère orienté vers le haut et dont l'origine est au fond du tonneau, on a $h_A = H$ et $h_B = 0$. Les deux points sont à l'air libre, donc $P_A = P_B = P_0$ et la surface du réservoir étant grande, on peut considérer que $V_A = 0$. La vitesse v_0 recherchée est bien sûr V_B. On trouve donc (résultat de cours) que :

$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

2. Lorsque la hauteur d'eau dans le tonneau est devenue égale à h_1.

   (a) Si on n'a touché à rien, la même équation générale reste valable. La seule différence est que la pression au fond du tonneau n'est plus la pression atmosphérique, mais qu'il y a une pression hydrostatique supplémentaire. Donc :

$$P_B = P_0 + \rho\,g\,h_1$$

   On trouve donc :

$$v_1 = \sqrt{2g\,(H - h_1)}$$

qui est donc inférieure à v_0.

(b) Si on place le tuyau à la surface, on a de nouveau $P_B = P_0$, mais maintenant c'est h_B qui n'est plus nul et vaut h_1. On trouve donc également :

$$v_2 = \sqrt{2g\,(H - h_1)} = v_1$$

Exercice 3 - Freinage aquatique

1. On est dans un exercice analogue à la partie horizontale du mouvement du parachutiste vu en TD.

   (a) Le principe fondamental de la dynamique nous dit que :

   $$m\,\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$

   Ici, la somme des forces extérieures dirigées suivant la verticale est nulle puisque le poids est exactement compensé par la "réaction" du support (ici la poussée d'Archimède sur le wagonnet + la réaction des rails sur les roues). On peut donc projeter cette relation vectorielle sur l'horizontale. En utilisant le fait que $\frac{dv}{dt} = a$, on obtient :

   $$m\,\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma\,v(t)$$

   Le signe est évident, si l'on se souvient que le frottement s'oppose au mouvement. On trouve donc :

   $$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\,v(t)$$

   avec :

   $$\tau = -\frac{m}{\gamma}$$

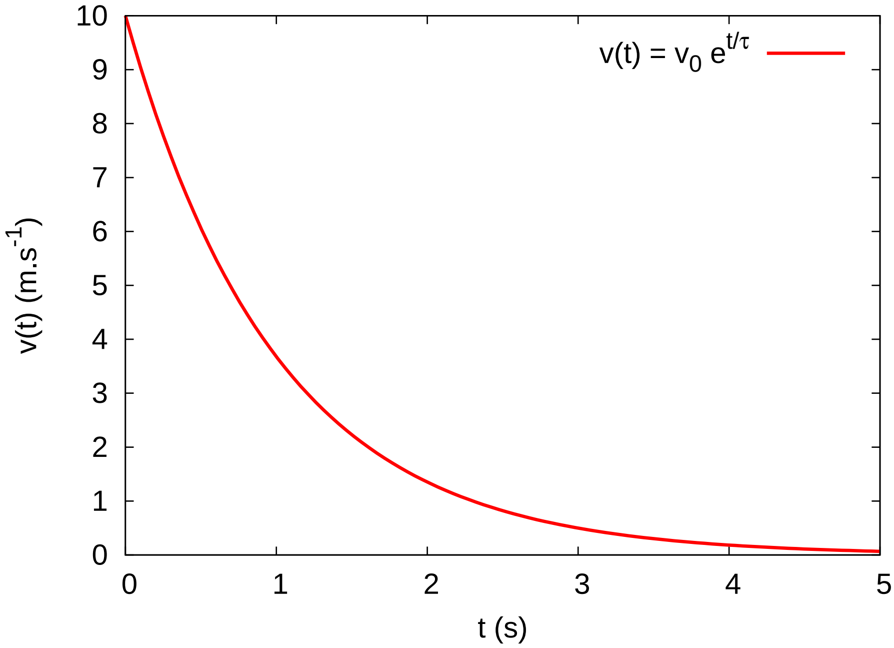
   (b) L'équation montre immédiatement que τ est un temps $[T]$ (unité S.I. : s). On aurait pu aussi définir τ par $\tau = +\frac{m}{\gamma}$ et laisser le signe " $-$ " explicite dans les équations. Ça ne change rien aux raisonnements.

2. C'est une équation à variables séparables, mais on sait d'après le cours que la solution est une exponentielle.

   (a) On peut donc écrire directement :

   $$v(t) = v_0\,\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

On vérifie bien que cette expression vérifie la condition initiale $v(0) = v_0$ puisque $\exp 0 = 1$. On a conservé ici la notation imposée par l'énoncé avec $\tau < 0$.

(b) 

3. L'abscisse s'obtient à partir de l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

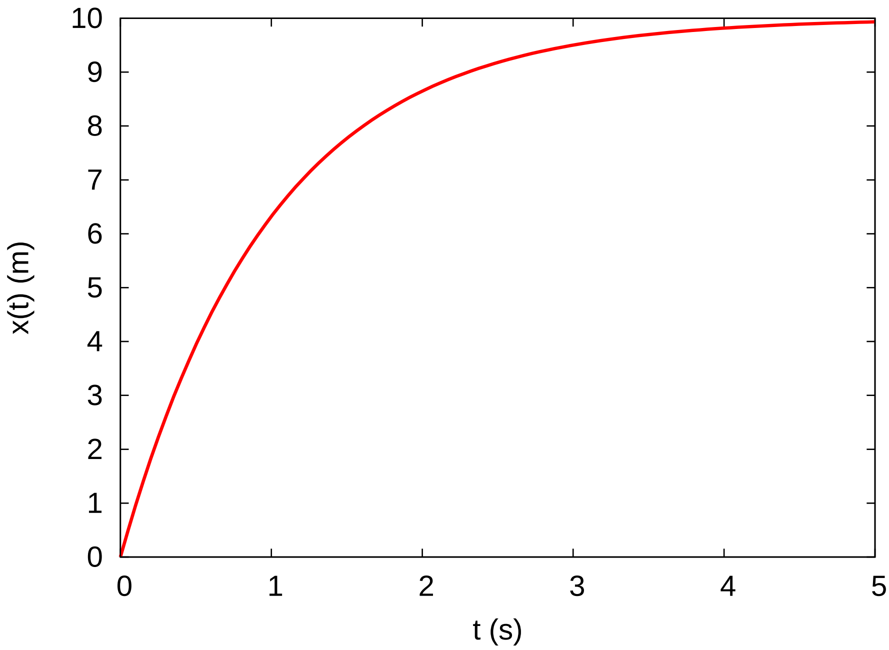
(a) Par intégration, on obtient :

$$x(t) = v_0\tau \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + A$$

où x_0 est une constante d'intégration. On la trouve en utilisant la condition initiale $x(0) = 0$, ce qui impose que $A = -v_0\,\tau$. Donc :

$$x(t) = -v_0\,\tau\left(1 - \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

où l'on se souvient que τ est négatif d'après le résultat de la question 1. On a donc bien $x(t) > 0$.



(b)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -v_0\,\tau = x_{lim}$$

4. On nous donne la distance d'arrêt et la vitesse initiale. On va donc pouvoir en déduire d'abord la valeur de τ puis γ.

   (a)

$$\tau = -\frac{x_{lim}}{v_0} = -\frac{10.0}{10.0} = -1\,\mathrm{s}$$

$$\gamma = -\frac{m}{\tau} = \frac{1000.0}{1.0} = 10^3\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$$

   (b) On est à $\delta x = 20\,\mathrm{cm}$ de l'arrêt complet à l'instant T tel que :

$$-v_0\,\tau\left(1 - \exp\left(\frac{T}{\tau}\right)\right) = x_{lim} - \delta x$$

   Soit :

$$1 - \exp\left(-T\right) = 1.0 - 2\,10^{-2}$$

   ou :

$$\exp\left(-T\right) = \exp\left(-4\right)$$

   en utilisant l'information du texte : $e^{-4} = 2\,10^{-2}$. Soit $T = 4\,\mathrm{s}$. A cet instant, on a $v(T) = v_0\,\exp\left(-4\right) = 10.0 \times 2\,10^{-2} = 0.2\,\mathrm{m.s^{-1}}$. On peut considérer que le wagon est quasiment arrêté. A partir de là, très probablement, un certains nombre d'autres effets sont à prendre en compte pour décrire la toute fin du mouvement (existence d'une butée par exemple, ou intervention d'un "opérateur extérieur", etc...).

5. L'accélération moyenne est la variation de vitesse rapportée à l'intervalle de temps écoulé. Soit :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Pendant la première seconde, on a donc :

$$\bar{a} = \frac{10.0\left(1.0 - \exp\left(-\frac{1.0}{1.0}\right)\right)}{1.0} = 10.0\left(1.0 - e^{-1}\right) \simeq 0.63\,g$$

Ce qui est assez fort.

Exercice 4 - Rotation d'un ressort

1. C'est un résultat de cours. On a :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u}_\rho$$

où l'on a utilisé le fait que le mouvement était horizontal (pas de déplacement suivant $\overrightarrow{u}_z$) et que ρ est constant et égal à R. Rappel : c'est une énorme faute d'imaginer qu'il puisse y avoir une contribution ϕ suivant $\overrightarrow{u}_\phi$. D'abord l'expression obtenue ne serait pas homogène, ce qui est idiot, et la définition même de $\overrightarrow{u}_\rho$ est justement faite pour donner directement le déplacement radial depuis O vers M. Par dérivation, on obtient (voir cours) :

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\phi}\,\overrightarrow{u}_\phi$$

En utilisant l'énoncé, on lit dans le texte que la vitesse angulaire ($\dot{\phi}$) est constante et s'appelle ω. Donc

$$\overrightarrow{v} = R\omega\,\overrightarrow{u}_\phi$$

Et finalement :

$$\overrightarrow{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u}_\rho$$

Ici, seuls les vecteurs de base ont une dérivée non nulle. Tous les autres termes sont constants.

2. Le principe fondamental nous dit :

$$m\,\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$

Ici, le poids est compensé par la réaction de la table. Il n'y a donc pas de force suivant la verticale. la seule force horizontale est celle exercée par le ressort. Elle est proportionnelle à son allongement par rapport à sa longueur au repos. Donc en projetant sur la direction de $\vec{u}_\rho$ on obtient :

$$-m\,R\omega^2 = -k\ (R - l_0)$$

On en déduit :

$$R = \frac{k\,l_0}{k - m\omega^2}$$

On constate bien que lorsque ω augmente, le dénominateur diminue et donc le rayon augmente.

Exercice 5 - La luge

Cet exercice est presque identique à celui de L'esquimau fait en TD. Le texte ne mentionnait à aucun moment une possible force de frottement, mais demandait (question 3) d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique – ce qui suppose qu'on soit capable de calculer les travaux des forces. Il fallait donc considérer que, comme en TD, le frottement était négligeable.

1. On écrit :

   $$\overrightarrow{OM} = \rho_0\,\vec{u}_\rho$$

   d'où :

   $$\vec{v} = \rho_0\dot{\phi}\,\vec{u}_\phi$$

   Mais ici $\dot{\phi}$ n'est pas constant ! On a donc :

   $$\vec{a} = -\rho_0\dot{\phi}^2\,\vec{u}_\rho + \rho_0\ddot{\phi}\,\vec{u}_\phi$$

2. Il y a deux forces extérieures s'appliquant à la luge : son poids $m\,\vec{g}$ et la réaction de la piste $\vec{R}$. Le poids est dirigé suivant la verticale ; la réaction est perpendiculaire à la piste, et donc dirigée suivant $\vec{u}_\rho$. Le principe fondamental nous donne donc :

   $$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{R}$$

   En projetant sur $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\phi$ on obtient respectivement :

   $$-m\,\rho_0\dot{\phi}^2 = -m\,g\,\cos\phi + R$$

   $$m\,\rho_0\ddot{\phi} = m\,g\,\sin\phi$$

3. Le théorème de l'énergie cinétique nous dit que la variation d'énergie cinétique entre le point de départ (vitesse de module v_0) et le point d'arrivée (vitesse de module $\rho_0\dot{\phi}$) est égale au travail des forces extérieures. Ici, la réaction ne travaille pas puisqu'elle est toujours perpendiculaire à la piste. Le travail du poids est égal à (en calculant la distance verticale parcourue par différence entre la hauteur au départ et la projection du point courant sur la verticale) :

$$W = m\,g\,\rho_0\,(1 - \cos\phi)$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}m\,\rho_0^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = m\,g\,\rho_0\,(1 - \cos\phi)$$

Attention à ne pas oublier de soustraire l'énergie cinétique initiale !

4. De la question 3, on tire :

$$m\,\rho_0\dot{\phi}^2 = \frac{m\,v_0^2}{\rho_0} + 2m\,g\,(1 - \cos\phi)$$

En reportant ce résultat dans l'équation contenant R (question 2), on tire :

$$R = m\,g\,(3\cos\phi - 2) - \frac{m\,v_0^2}{\rho_0}$$

5. La luge décolle lorsque la réaction s'annule. Soit :

$$\cos\phi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3g\,\rho_0}$$

6. $\cos\phi$ ne peut pas être plus grand que 1. Donc, dans l'expression précédente, il existe une vitesse maximum v_{0c} pour laquelle la description précédente a un sens. Elle est telle que :

$$v_{0c}^2 = g\,\rho_0$$

Au delà, la luge part directement sur une trajectoire parabolique (chute libre) dont le rayon de courbure à l'origine est plus grand que ρ_0.