Corrigé succinct du partiel du 8 novembre 2008

Exercice 1

1. On note respectivement 1, 2 et 3 les trois liquides (de haut en bas), et P_1, P_2 et P_3 les pressions au bas de chacun des liquides la pression au fond est donc P_3. en partant de la surface et en changeant de ρ à chaque interface, on obtient immédiatement :
$$P_3 = P_0 + g\ (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)$$
A.N. :
$$P_3 = 10^5 + 9.81\ (7 \times 0.8 + 8 \times 1 + 6.6 \times 13.6)\ 10^{-2} \times 10^3$$
$$P_3 = 10^5 + (9.81 \times 7.6 \times 13.6)\ 10$$
$$P_3 = 1.1\,10^5\,\mathrm{Pa}$$
en utilisant le résultat numérique donné dans l'énoncé. Note : il ne faut **surtout pas** calculer les pressions intermédiaires qui ne sont pas demandées.
2. Dénivellation. Avec des notations évidente (h_3 pour le mercure), on a :
$$\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_3 h_3$$
$$h_3 = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{\rho_3} = \frac{13.6}{13.6} = 1\,\mathrm{cm}$$
Ce résultat est à retenir, il va resservir (7 cm d'huile + 8 cm d'eau = 1 cm de mercure).
3. Hauteur d'huile à ajouter. On la note ici h_4 :
$$h_4 = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{\rho_1} = \frac{13.6}{0.8} = 17\,\mathrm{cm}$$
C'est bien sûr le même ρ_1 (de l'huile) qui intervient des deux cotés.
4. On vient de trouver que 17 cm d'huile équivalent à 1 cm de mercure (questions 2 et 3), donc avec 34 cm d'huile le mercure est remonté de 1 cm de l'autre coté. Comme il y en a 5 cm dans le tube horizontal du fond, il en reste 44 cm à partager équitablement entre les deux branches. On a donc à gauche (en partant du fond) 22 cm de mercure puis 34 cm d'huile, qui arrive donc à une hauteur de 56 cm, et dans la branche de droite 23 cm de mercure puis 8 cm d'eau (total 31 cm) puis 7 cm d'huile (total 38 cm).

5. a) à 36 cm on est dans l'huile des deux coté, mais pas à la même pression (on ne peut pas passer de l'huile à l'huile en restant dans l'huile). La pression est plus grande à droite puisqu'il y a une plus grande hauteur d'huile au dessus.
b) à 20 cm on est dans le mercure des deux cotés et les pressions sont égales puisque l'on peut passer de l'un à l'autre en restant dans le mercure.

Exercice 2

1. On utilise le théorème d'Archimède puisque le solide est complètement immergé dans du fluide et en équilibre. En appelant S sa surface horizontale (qui va se simplifier), on a :

$$S\ (h_1\rho_1 + h_2\rho_2)\ g = S\ (h_1 + h_2)\ \rho_0\, g$$

a) On en déduit que :

$$h_2 = h_1\,\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0 - \rho_2} = 30 \times \frac{0.4}{0.6} = 20\,\mathrm{cm}$$

b) Il ne se passe rien ! on a le même volume de liquide ayant la même masse qui déplace le même volume de fluide, donc la somme des forces reste nulle. L'équilibre est indiffèrent. Il est vrai que la pression sur la face supérieure a diminué, mais celle sur la face inférieure aussi (et d'autant). Tout se compense exactement.

2. C'est évidemment le liège qui est au dessus (sinon, l'équilibre est instable). Cette fois-ci, tout le solide n'est pas immergé, mais Archimède s'applique quand même (et on néglige la contribution de l'air.

$$h_1\rho_1 + h_3\rho_2 = \left(h_1 + \frac{h_3}{2}\right)\ \rho_0$$

$$h_3 = h_1\,\frac{\rho_1 - \rho_0}{\frac{\rho_0}{2} - \rho_2} = 30 \times \frac{0.4}{0.1} = 1.2\,\mathrm{m}$$

Exercice 3

1. On a, d'après la définition du débit :

$$Q = V_b\,\pi\,R_b^2$$

Soit :

$$V_b = \frac{Q}{\pi\, R_b^2} = \frac{0.3}{3\,(0.1)^2} = 10\,\mathrm{ms}^{-1}$$

2. On peut utiliser la conservation du débit entre les régions A et B, ou bien la même formule, ce qui donne :

$$V_a = \frac{Q}{\pi\, R_a^2} = \frac{0.3}{3\,(0.3)^2} = \frac{10}{9} \simeq 1.1\,\mathrm{ms}^{-1}$$

3. A la sortie du tube on est à la pression atmosphérique, donc :

$$P_b = P_0$$

4. On utilise le théorème de Bernouilli (en rappelant les conditions d'application, voir le cours). La ligne de courant est à hauteur constante, donc :

$$P_a + \frac{1}{2}\,\rho\, V_a^2 = P_b + \frac{1}{2}\,\rho\, V_b^2$$

Soit :

$$P_a = P_0 + \frac{1}{2}\,\rho\,\left(V_b^2 - V_a^2\right) = 10^5 + \frac{1}{2}\,10^3\,\left(10^2 - \frac{10^2}{81}\right) \simeq 1.5\,10^5\,\mathrm{Pa}$$

La où la vitesse est plus faible, la pression est plus forte.

5. On néglige la distance parcourue verticalement dans le tuyau. A la base des deux tubes fins, on a donc les pressions P_a et P_b qu'on vient de calculer, et l'eau est immobile dans ces tubes. On ne peut **pas** utiliser Bernouilli parce qu'il n'y a pas de ligne de courant allant de la base au sommet ! On est simplement dans un cas d'hydrostatique :

$$\rho\, g\, h = P - P_0$$

a)

$$h_a = \frac{P_a - P_0}{g\,\rho} = \frac{1}{2}\,\frac{10^5}{10 \times 10^3} = 5\,\mathrm{m}$$

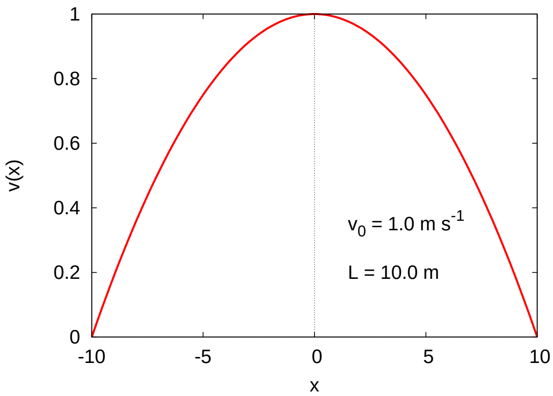
b)

$$h_b = 0$$

puisque $P_B = P_0$.

Exercice 4

1. Cette courbe est une parabole :



2. Sur une petite largeur dx on peut considérer que la vitesse est constante et vaut $v(x)$. Cela est vrai sur toute la hauteur H on peut donc prendre un élément de surface $dS = H\,dx$ et écrire que le débit à travers dS est :

$$dQ_V = v(x)\,H\,dx$$

3. La variable x varie de $-L$ à $+L$. on a donc :

$$Q_V = \int_{-L}^{+L} v(x)\,H\,dx$$

$$Q_V = \frac{H\,v_0}{L}\int_{-L}^{+L}\left(L^2 - x^2\right)\,dx$$

4. Après intégration, on trouve :

$$Q_V = \frac{H\,v_0}{L^2}\left[L^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-L}^{+L}$$

$$Q_V = \frac{2}{3}\,(2LH)\,v_0$$

v_0 est la vitesse maximale de l'écoulement (au milieu de la rivière. $2LH$ est la surface totale à travers laquelle l'eau s'écoule. On voit donc que le débit est réduit d'un tiers par rapport à celui que l'on aurait si toute l'eau coulait à la vitesse v_0. Dans la réalité, ce serait encore moins parce que le "frottement" au fond du canal ferait que la vitesse varie aussi en y, ce qu'on a négligé ici.