Analyse Numérique - 2

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

13 Janvier 2014

Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes
Non-Linéaires

- Recherche de 0
- Dichotomie
- Newton
- Arrêt
- Newton-Raphson

Différentiation
numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.
- Si 1D :

1. Tracer la courbe (toujours !).

Recherche de zéro à 1D

Systèmes
Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation
numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.
- Si 1D :

  1. Tracer la courbe (toujours !).
  2. Choisir un encadrement.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.
- Si 1D :

1. Tracer la courbe (toujours !).
2. Choisir un encadrement.
3. Forcer l'algorithme à rester dans l'encadrement.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.
- Si 1D :

1. Tracer la courbe (toujours !).
2. Choisir un encadrement.
3. Forcer l'algorithme à rester dans l'encadrement.
4. Mélanger dichotomie et Newton.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.
- Si 1D :

  1. Tracer la courbe (toujours !).
  2. Choisir un encadrement.
  3. Forcer l'algorithme à rester dans l'encadrement.
  4. Mélanger dichotomie et Newton.
  5. Choisir et respecter le critère d'arrêt.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes
Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation
numérique

- Différence fondamentale entre problème 1D ou pas.
- Dans tous les cas, l'algorithme est itératif.
- Si 1D :

  1. Tracer la courbe (toujours !).
  2. Choisir un encadrement.
  3. Forcer l'algorithme à rester dans l'encadrement.
  4. Mélanger dichotomie et Newton.
  5. Choisir et respecter le critère d'arrêt.

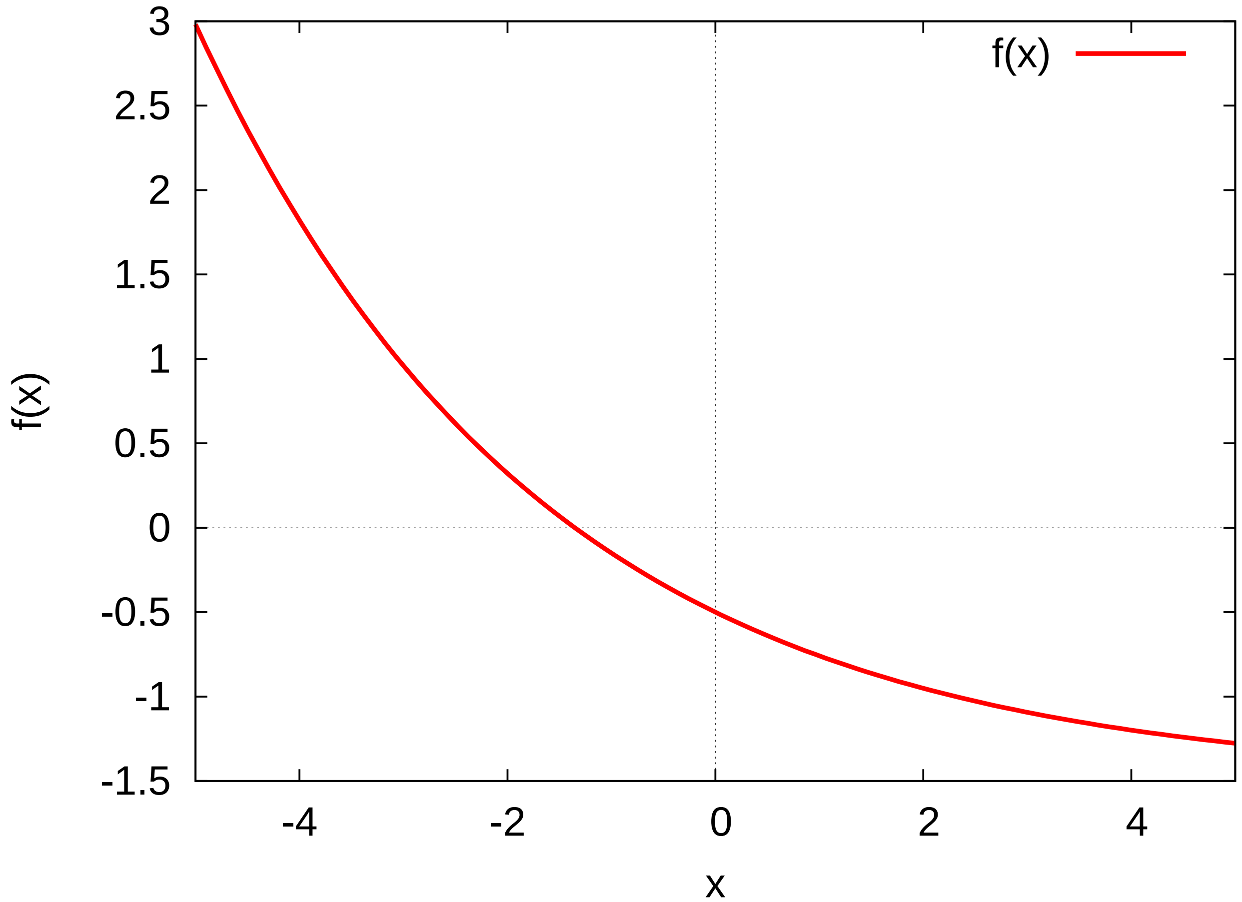
- Si plusieurs équations : utiliser Newton-Raphson avec prudence.

Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

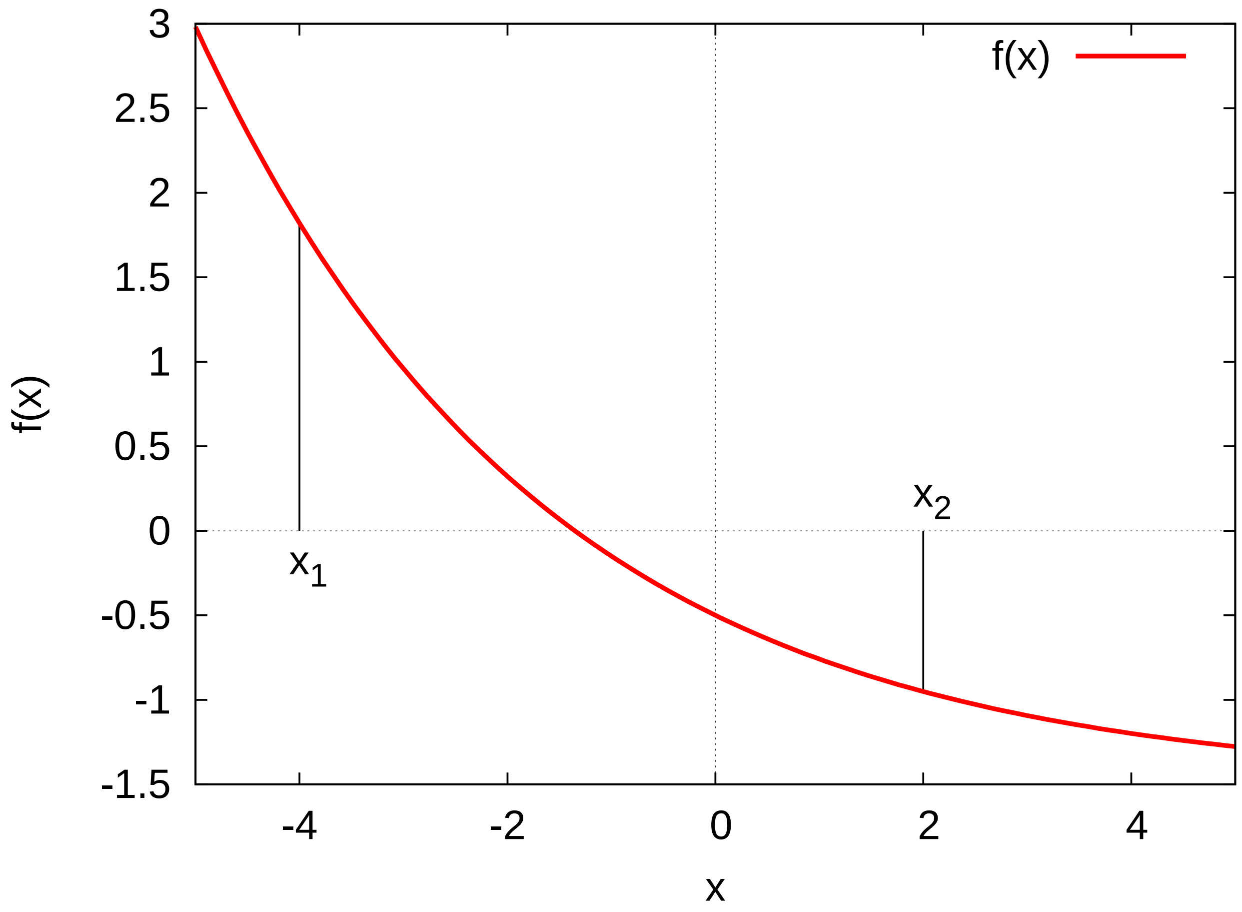
Exemple :



Recherche de zéro à 1D

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

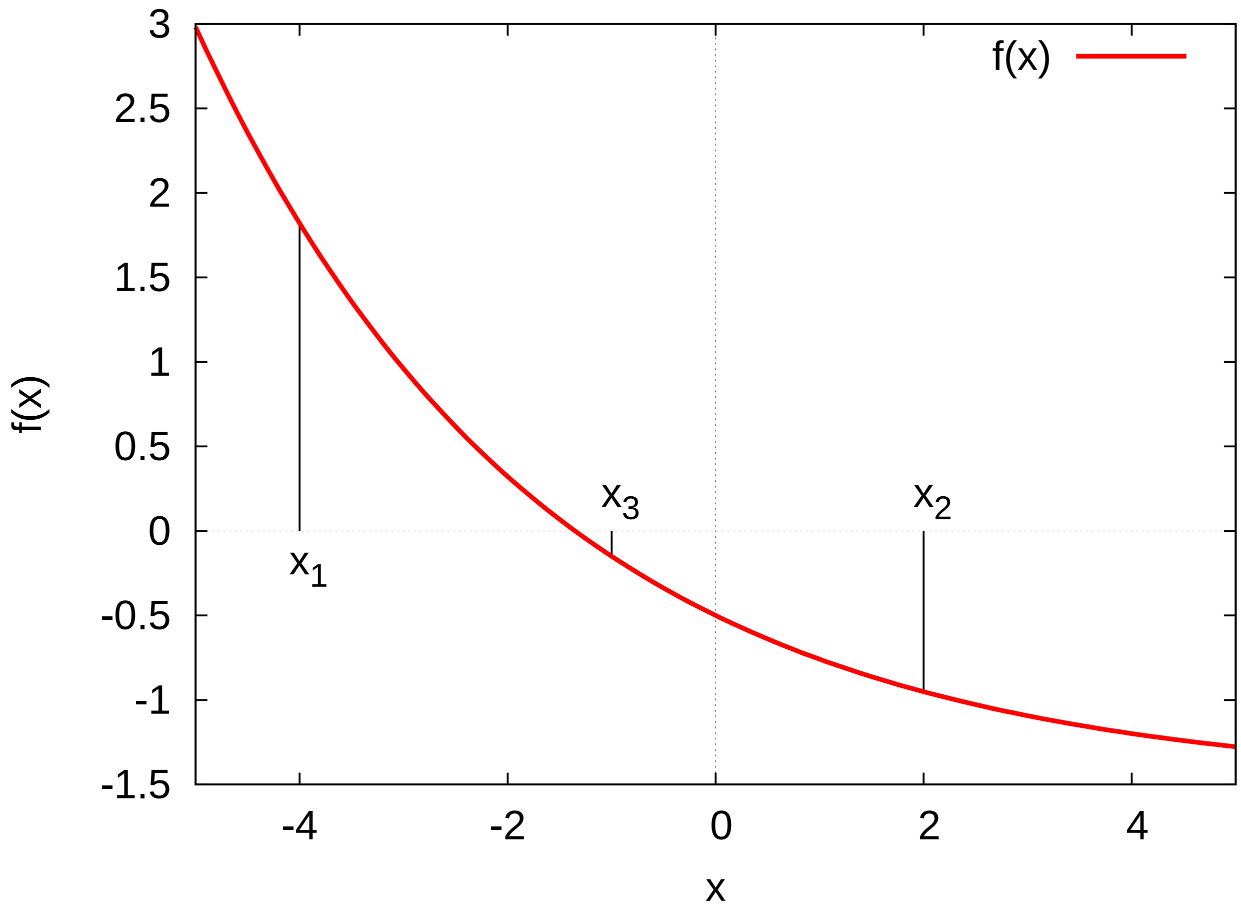
Encadrement :



Dichotomie

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

$$x_3 = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2)$$

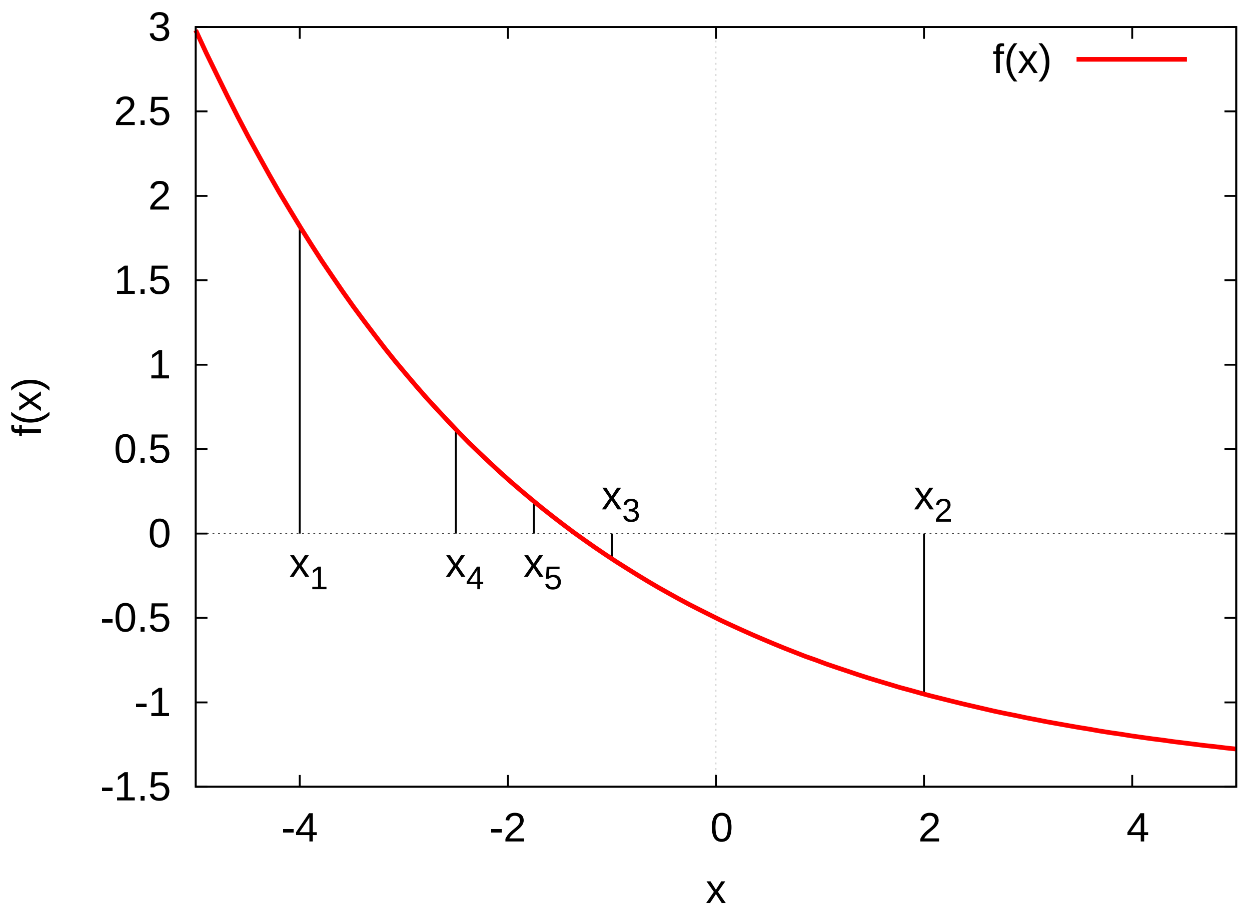


Dichotomie

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

Chaque itération divise l'intervalle par 2.



Newton

Systèmes
Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation
numérique

- La dichotomie est sûre, mais lente.

Newton

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

- La dichotomie est sûre, mais lente.
- L'algorithme de Newton est extraordinairement efficace, mais dangereux.

Newton

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

- La dichotomie est sûre, mais lente.
- L'algorithme de Newton est extraordinairement efficace, mais dangereux.
- Si $\bar{x}$ est la solution recherchée et que l'on part de x_1, on peut écrire :

$$x_1 = \bar{x} + \delta x$$

$$f\left(x_1\right) = f\left(\bar{x}\right) + \delta x\, f'\left(\bar{x}\right) + o\left(\delta x^2\right)$$

$$\delta x \simeq \frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}$$

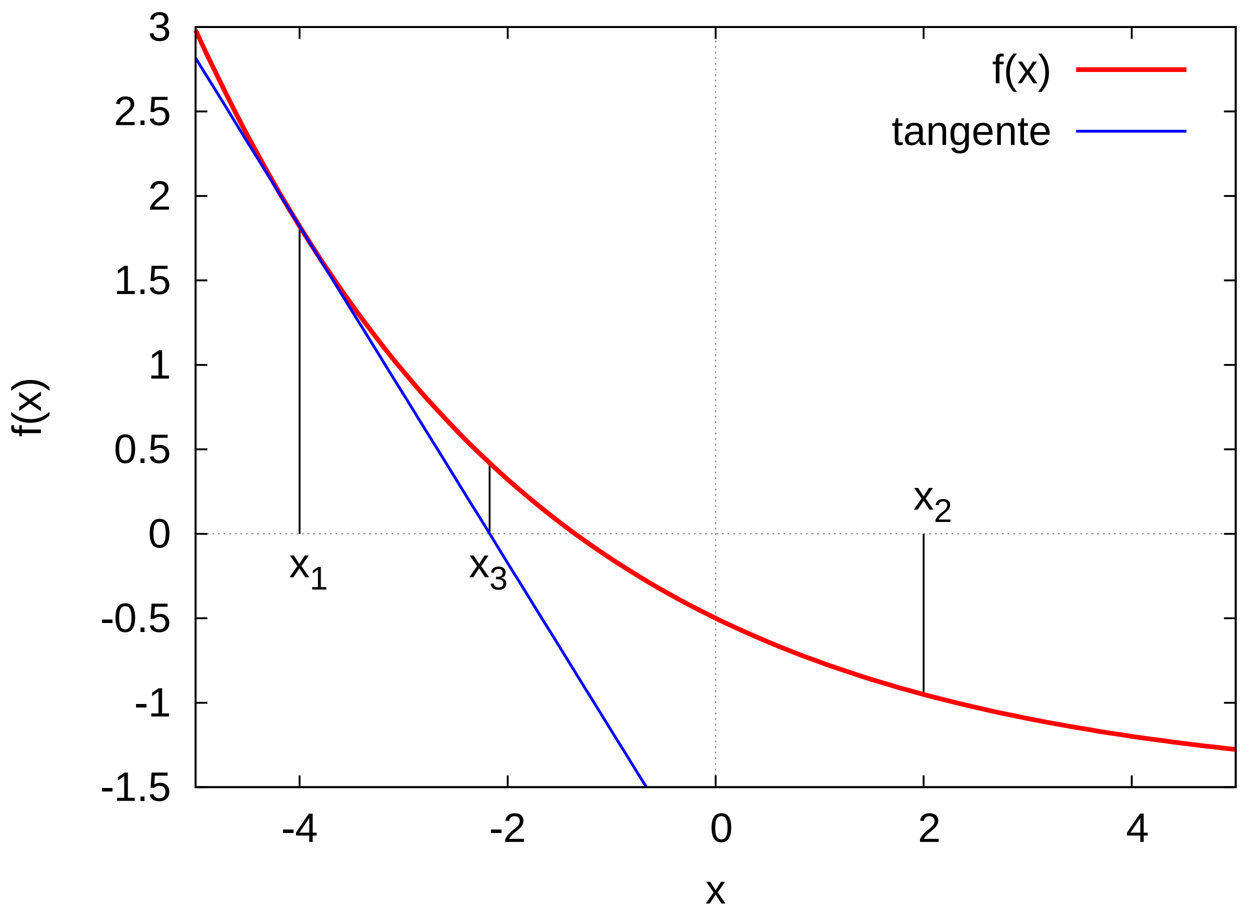
- La convergence est **quadratique** !
- Il faut choisir très soigneusement le point initial x_1.

Newton

Systèmes Non-Linéaires
- Recherche de 0
- Dichotomie
- Newton
- Arrêt
- Newton-Raphson

Différentiation numérique

Après une itération :

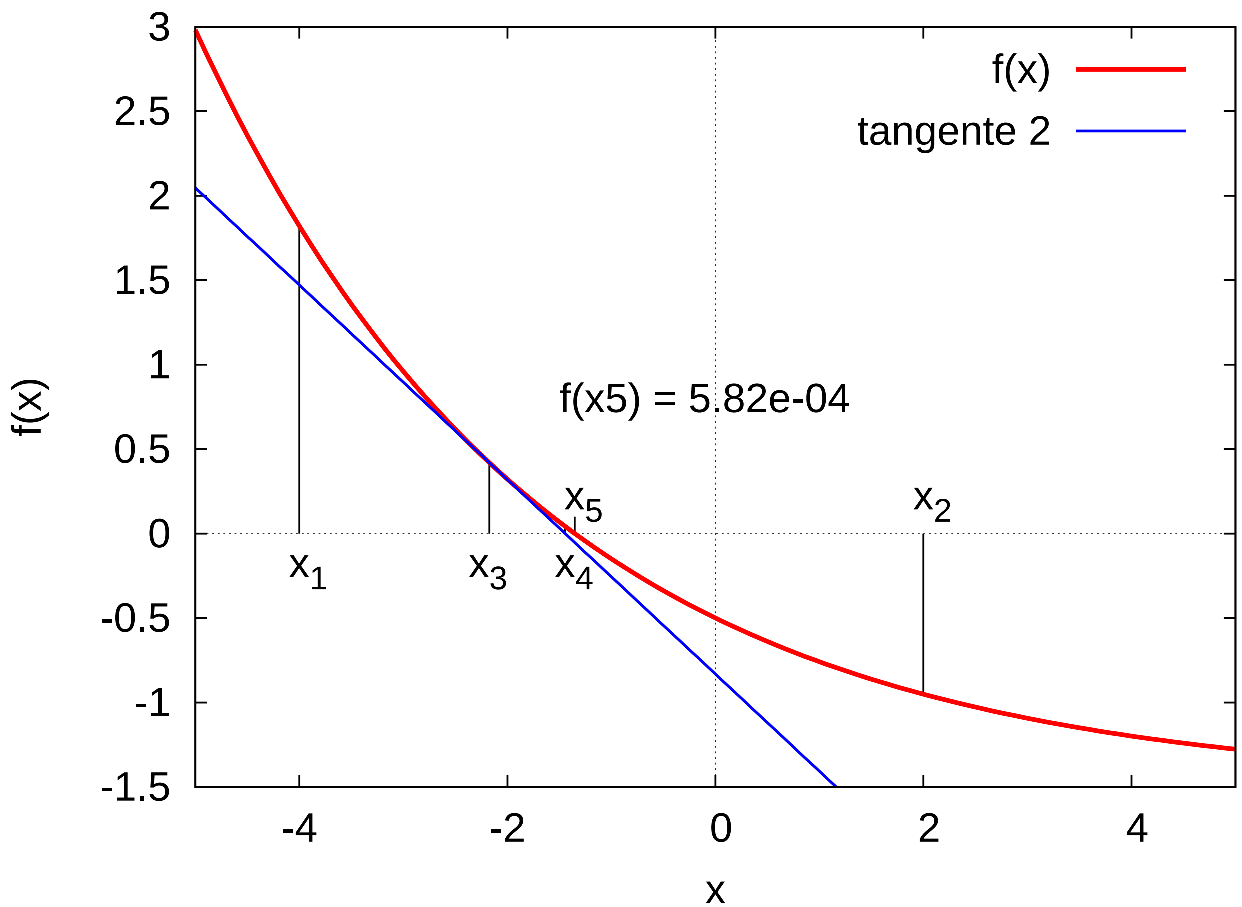


Newton

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

Après trois itérations :

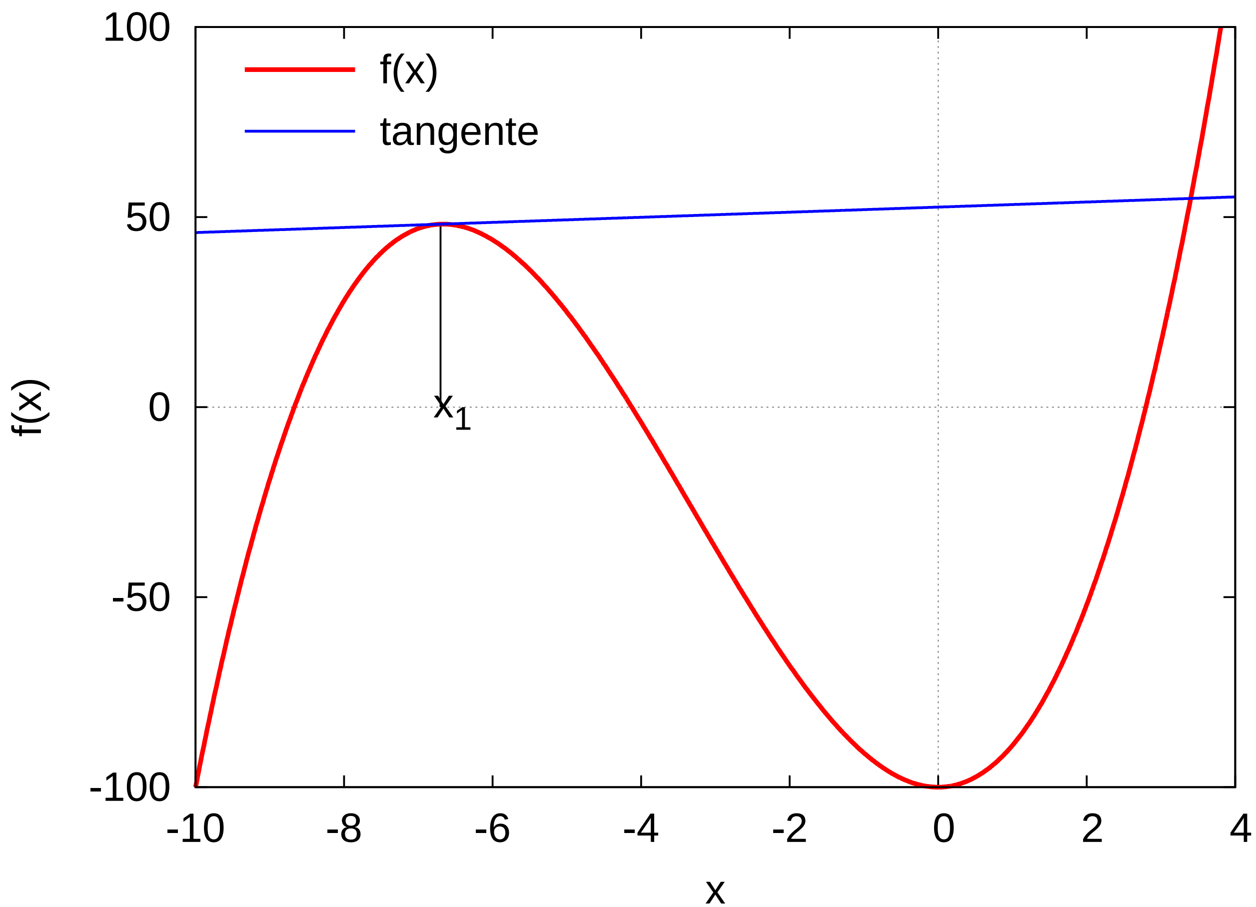


Newton

Systèmes
Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation
numérique

Avec un mauvais point de départ :

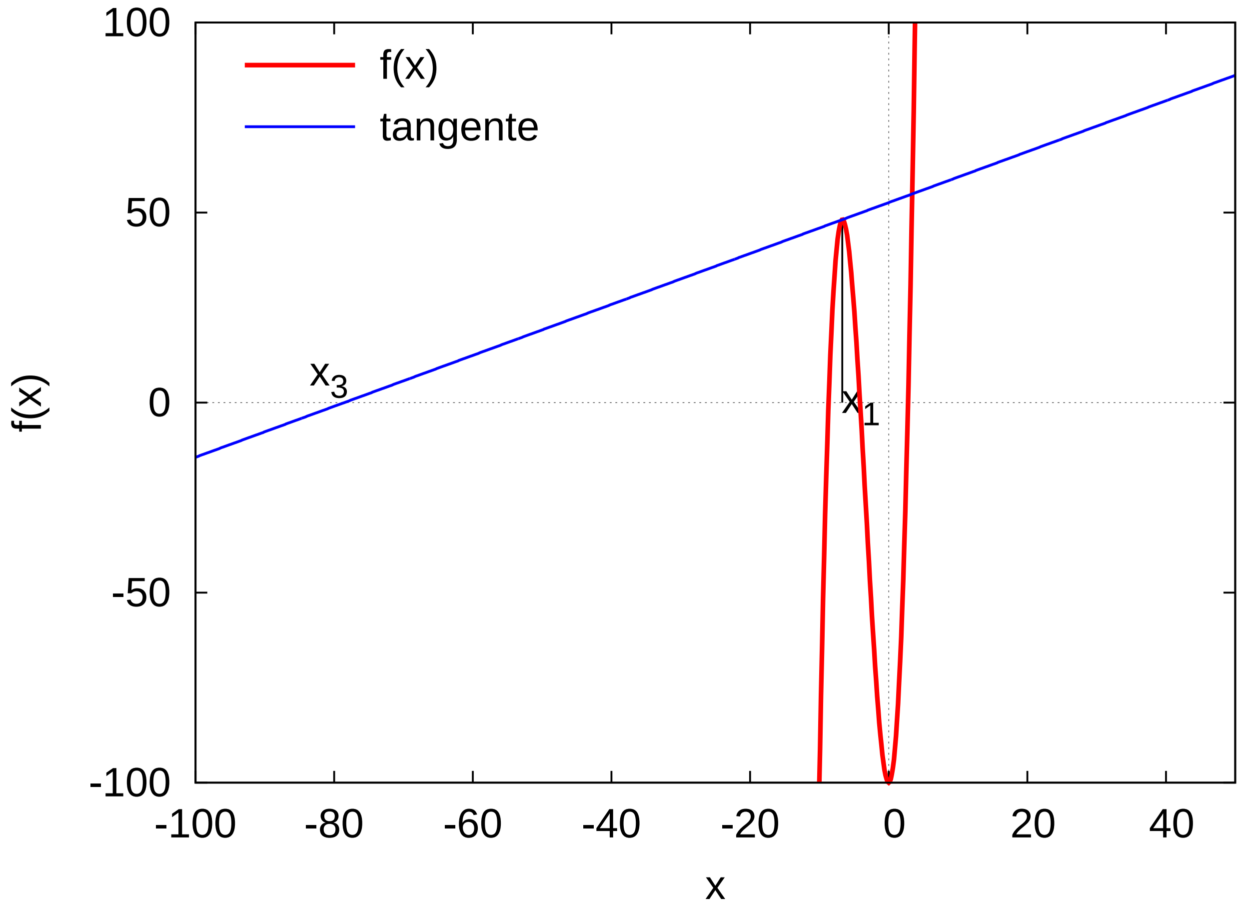


Newton

Systèmes
Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation
numérique

Avec un mauvais point de départ :

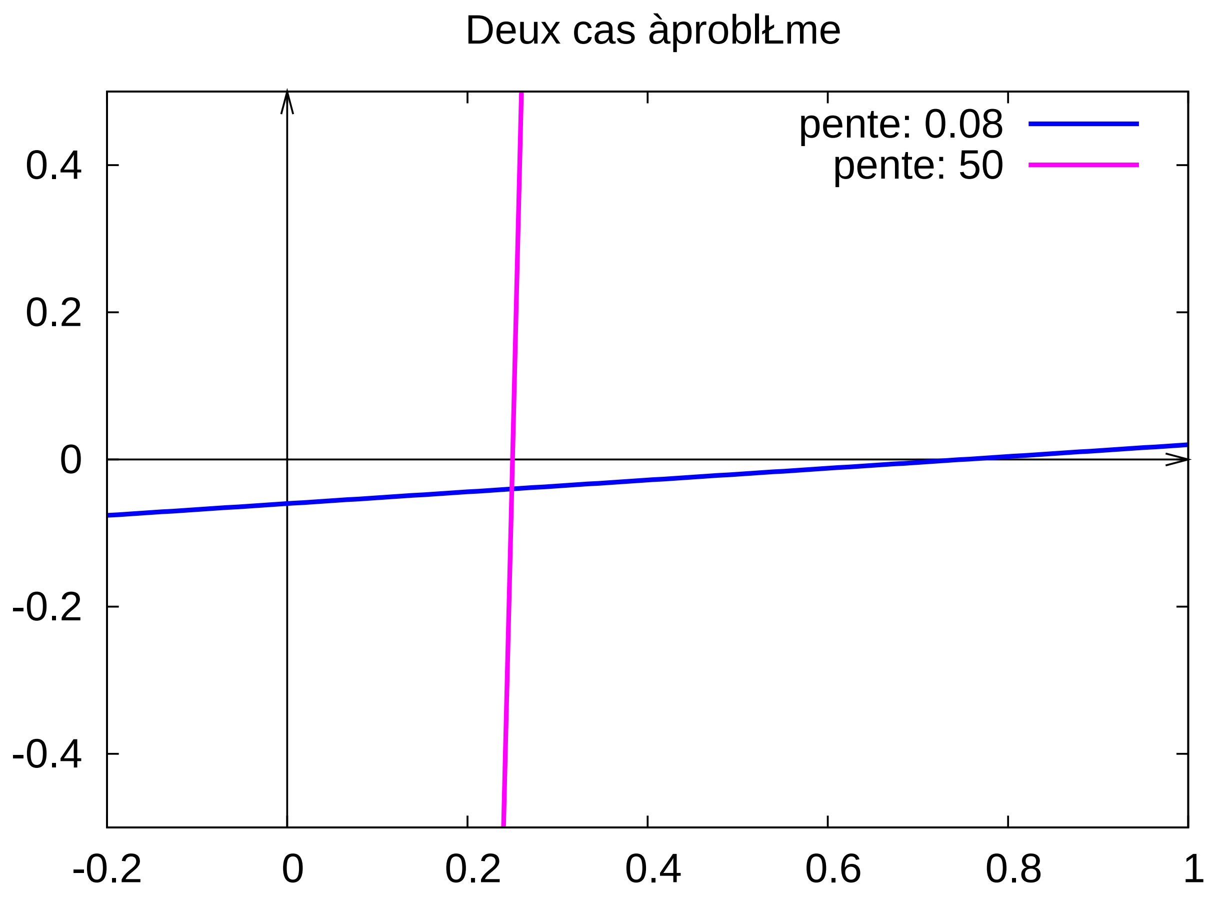


Critère d'arrêt

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation numérique

Il y a deux cas limite à craindre :



Critère d'arrêt

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

Pour garantir une solution “raisonnable”, il faut donc :

$$f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$$

$$|f(x_1)| < \epsilon_f \qquad |f(x_2)| < \epsilon_f$$

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2| + |x_1|} < \epsilon_x$$

Les valeurs de ϵ_x et ϵ_f sont à choisir en fonction du problème.

Newton-Raphson

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

Généralisation en dimension n de la méthode de Newton. On cherche $\bar{X}$, tel que :

$$F\left(\bar{X}\right) = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad F(X) = \begin{pmatrix} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{pmatrix}$$

Il est indispensable de commencer par bien étudier le problème physique. Sinon, les ennuis sont pires qu'à une dimension.

Newton-Raphson

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

- On choisi **avec soin** un point de départ $X^{(1)}$

Newton-Raphson

Systèmes
Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson

Différentiation
numérique

- On choisi **avec soin** un point de départ $X^{(1)}$
- On pose :

$$X^{(i)} = \bar{X} + \Delta X^{(i)}$$

Newton-Raphson

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

- On choisi **avec soin** un point de départ $X^{(1)}$
- On pose :

$$X^{(i)} = \bar{X} + \Delta X^{(i)}$$

- Taylor à l'ordre 1 :

$$F\left(X^{(i)}\right) = F\left(\bar{X}\right) + J\left(\bar{X}\right) \cdot \Delta X^{(i)} + o\left(\Delta X^{(i)2}\right)$$

Newton-Raphson

Systèmes Non-Linéaires
❖ Recherche de 0
❖ Dichotomie
❖ Newton
❖ Arrêt
❖ Newton-Raphson
Différentiation numérique

- On choisi **avec soin** un point de départ $X^{(1)}$
- On pose :

$$X^{(i)} = \bar{X} + \Delta X^{(i)}$$

- Taylor à l'ordre 1 :

$$F\left(X^{(i)}\right) = F\left(\bar{X}\right) + J\left(\bar{X}\right) \cdot \Delta X^{(i)} + o\left(\Delta X^{(i)2}\right)$$

- On calcule $\Delta X^{(i)}$ en approximant le Jacobien en $\bar{X}$ par celui en $X^{(i)}$, puis en résolvant le système linéaire :

$$J\left(\bar{X}\right) \cdot \Delta X^{(i)} = F\left(X^{(i)}\right)$$

- On itère :

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - \Delta X^{(i)}$$

Différentiation

Systèmes Non-Linéaires
Différentiation numérique
❖ Différentiation

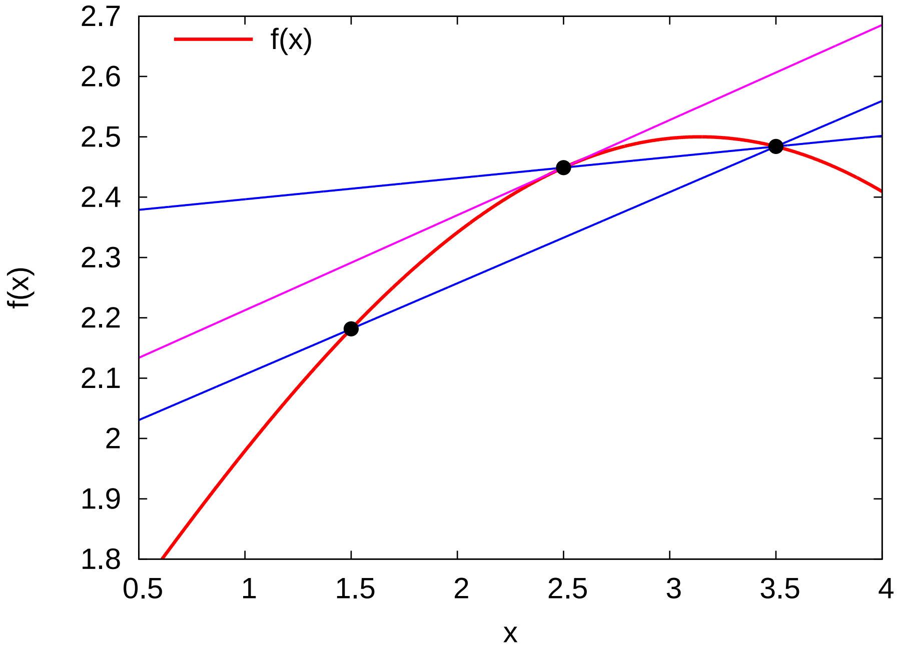
- N'est utilisable que si on connaît la fonction à dériver avec une précision infinie.

Différentiation

Systèmes Non-Linéaires
Différentiation numérique
❖ Différentiation

- N'est utilisable que si on connaît la fonction à dériver avec une précision infinie.
- Attention à toujours utiliser une formule symétrique :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$$



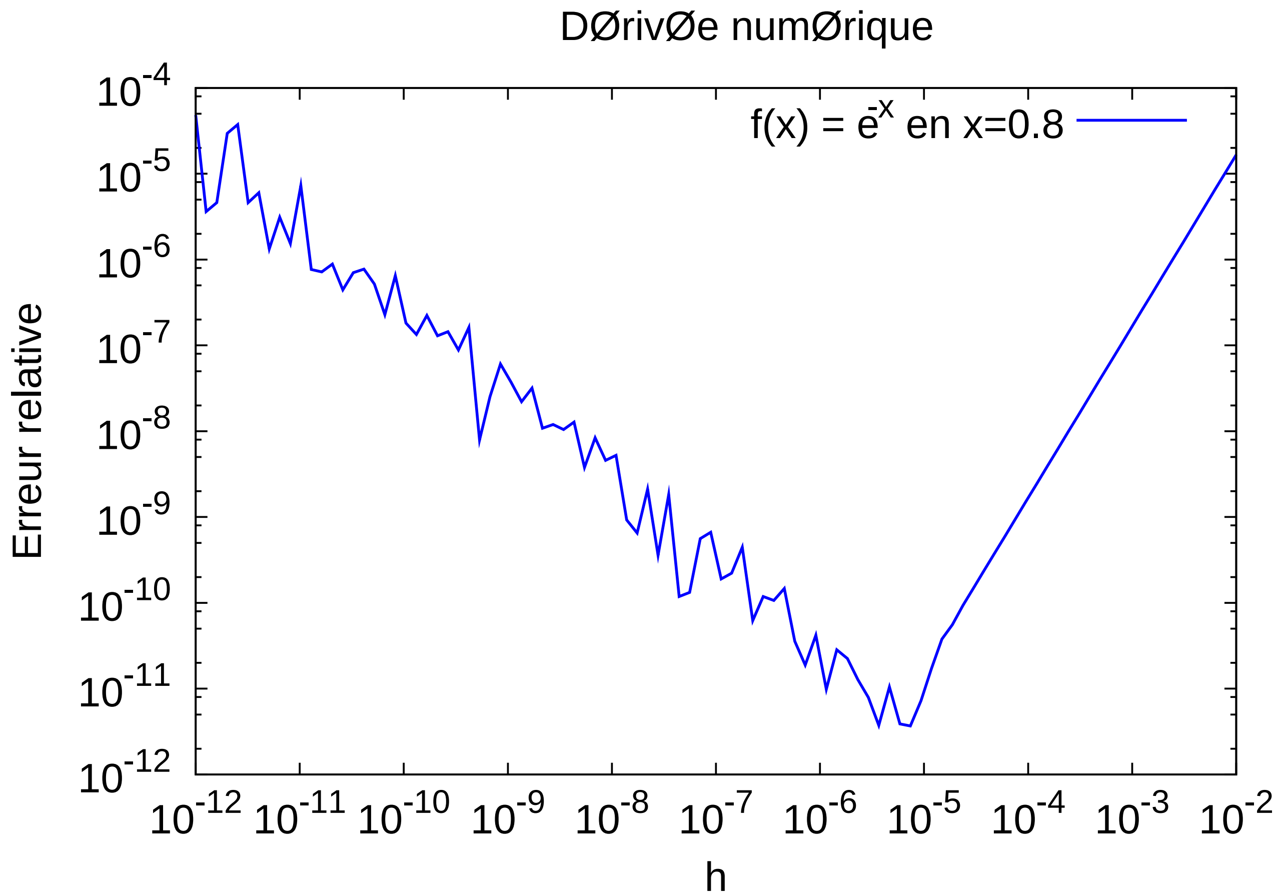
Différentiation - Choix de h

Systèmes Non-Linéaires
Différentiation numérique
❖ Différentiation

- Il ne faut pas prendre un pas h trop petit.

Différentiation - Choix de h

- Il ne faut pas prendre un pas h trop petit.
- Optimum : $h \sim \sqrt{\epsilon}$



Différentiation - Autres cas

- Si on ne peut pas calculer $f(x)$ avec la précision machine :
  - Résultats de mesures
  - Calcul numérique avec une barre d'erreur
  - Interpolation dans une table
  - etc...

Ne **pas** utiliser ces méthodes !

Différentiation - Autres cas

- Si on ne peut pas calculer $f(x)$ avec la précision machine :
  - ✦ Résultats de mesures
  - ✦ Calcul numérique avec une barre d'erreur
  - ✦ Interpolation dans une table
  - ✦ etc...

Ne **pas** utiliser ces méthodes !

Il est alors obligatoire :

- De “fitter” un modèle analytique aux points expérimentaux
- De calculer la dérivée analytique du modèle