Analyse Numérique - 3

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

13 janvier 2014

Intégration

Soit à calculer :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Il y a trois cas très différents à considérer :

Intégration

Soit à calculer :

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

Il y a trois cas très différents à considérer :

- Les points $(x_i, y_i = f(x_i))$ ne sont connus qu'à des abscisses x_i imposées.
  - ✦ Utiliser la méthode du trapèze ("Trapezoidal rule").

Intégration

Soit à calculer :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Il y a trois cas très différents à considérer :

- Les points $(x_i, y_i = f(x_i))$ ne sont connus qu'à des abscisses x_i imposées.
  - Utiliser la méthode du trapèze ("Trapezoidal rule").
- On peut calculer $y = f(x)$ avec précision pour toute valeur de x :
  - Utiliser la méthode de Romberg.

Intégration

Soit à calculer :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

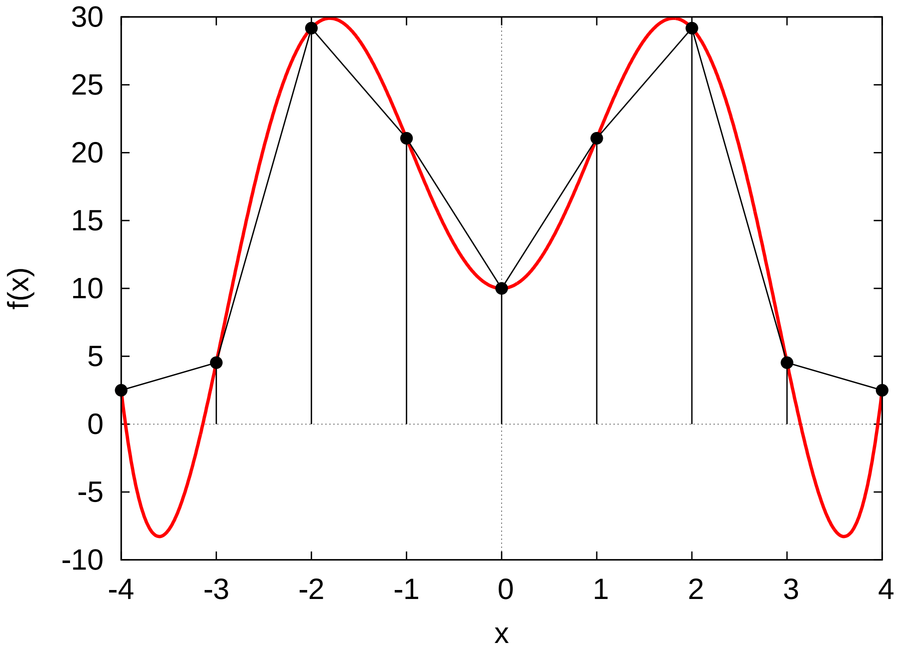
Il y a trois cas très différents à considérer :

- Les points $(x_i, y_i = f(x_i))$ ne sont connus qu'à des abscisses x_i imposées.
  - Utiliser la méthode du trapèze (“Trapezoidal rule”).
- On peut calculer $y = f(x)$ avec précision pour toute valeur de x :
  - Utiliser la méthode de Romberg.
- On reconnaît dans $f(x)$ une fonction analytique particulière remarquable
  - Utiliser la méthode de Gauss.

Intégration - Trapèze

Les points (x_i, y_i) sont imposés, pour $i \in [0, n]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ (pas forcément équidistants). Alors :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ (y_{i+1} + y_i)$$



Intégration - Trapèze Récursif

Avec un pas constant h, on peut améliorer progressivement la solution :

$$I_0^T = (b-a)\,\frac{1}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Intégration - Trapèze Récursif

Avec un pas constant h, on peut améliorer progressivement la solution :

$$I_0^T = (b-a)\,\frac{1}{2}\,(f(a)+f(b))$$

On pose $x_1 = 0.5\,(a+b)$ et $h_1 = 0.5\,(b-a)$, et

$$I_1^T = h_1\,\frac{1}{2}\,(f(a)+2f(x_1)+f(b))$$

$$I_1^T = \frac{1}{2}\,I_0^T + h_1\,f(x_1)$$

Intégration - Trapèze Récursif

Avec un pas constant h, on peut améliorer progressivement la solution :

$$I_0^T = (b-a)\,\frac{1}{2}\,(f(a)+f(b))$$

On pose $x_1 = 0.5\,(a+b)$ et $h_1 = 0.5\,(b-a)$, et

$$I_1^T = h_1\,\frac{1}{2}\,(f(a)+2f(x_1)+f(b))$$

$$I_1^T = \frac{1}{2}\,I_0^T + h_1\,f(x_1)$$

Généralisation :

$$h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$$

$$I_{i+1}^T = \frac{1}{2}\,I_i^T + h_{i+1}\sum_{k=1}^{2^i} f\left(x_{2k-1}\right)$$

Intégration - Simpson

Avec trois points, on a :

$$I_1^S = h_1 \frac{1}{3} \left(f(a) + 4\, f(x_1) + f(b)\right)$$

Intégration analytique du polynôme de degré 2 passant par a, x_1 et b.

Intégration - Simpson

Avec trois points, on a :

$$I_1^S = h_1 \, \frac{1}{3} \, (f(a) + 4\, f(x_1) + f(b))$$

Intégration analytique du polynôme de degré 2 passant par a, x_1 et b.
On constate que :

$$I_1^S = \frac{4\, I_1^T - I_0^T}{4 - 1}$$

Cette procédure peut se généraliser !

Intégration - Romberg

On défini $R(J, K)$ tel que :

- L'intégration se fait avec un pas constant $h_J = \frac{b-a}{2^J}$.

Intégration - Romberg

On défini $R(J, K)$ tel que :

- L'intégration se fait avec un pas constant $h_J = \frac{b-a}{2^J}$.
- Pour $K = 0$, on a une règle du trapèze.

Intégration - Romberg

On défini $R(J, K)$ tel que :

- L'intégration se fait avec un pas constant $h_J = \frac{b-a}{2^J}$.
- Pour $K = 0$, on a une règle du trapèze.
- Pour $K = 1$ on a une règle de Simpson.

Intégration - Romberg

On défini $R(J, K)$ tel que :

- L'intégration se fait avec un pas constant $h_J = \frac{b-a}{2^J}$.
- Pour $K = 0$, on a une règle du trapèze.
- Pour $K = 1$ on a une règle de Simpson.
- Pour K quelconque, l'interpolation est faite par des polynômes de degré $K + 1$.

Intégration - Romberg

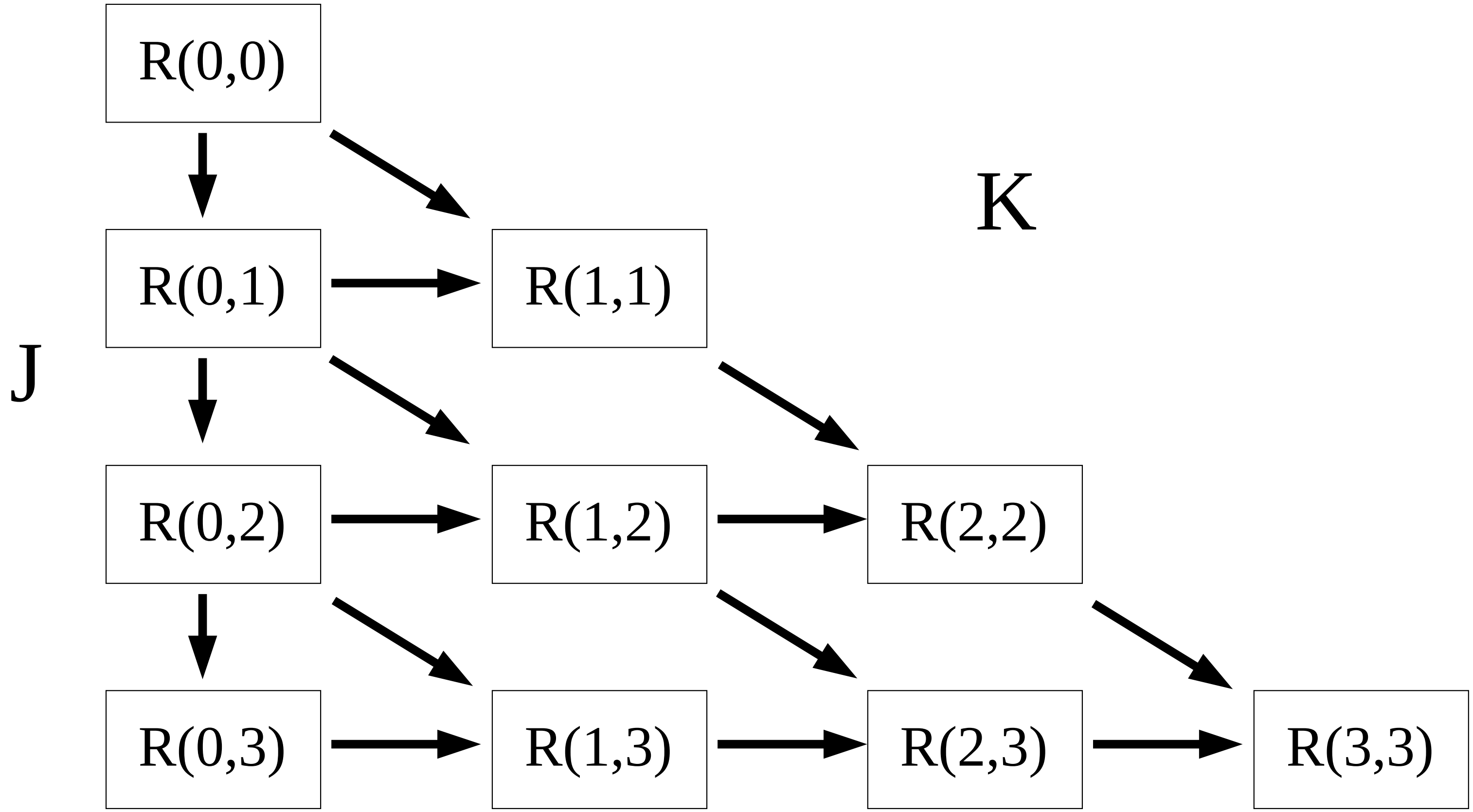
On défini $R(J, K)$ tel que :

- L'intégration se fait avec un pas constant $h_J = \frac{b-a}{2^J}$.
- Pour $K = 0$, on a une règle du trapèze.
- Pour $K = 1$ on a une règle de Simpson.
- Pour K quelconque, l'interpolation est faite par des polynômes de degré $K + 1$.

Alors :

$$R(J, K) = \frac{4^K R(J, K-1) - R(J-1, K-1)}{4^K - 1}$$

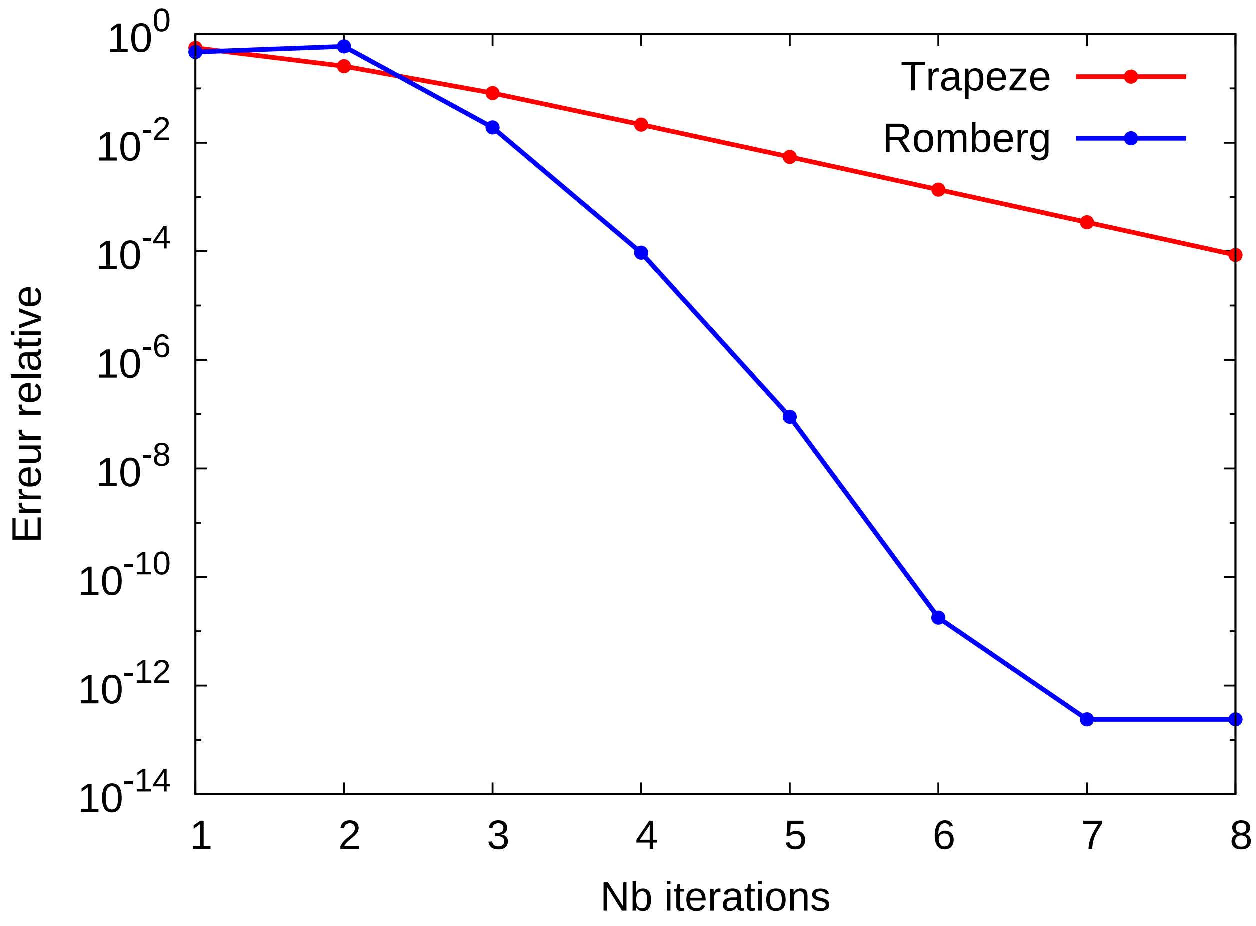
Intégration - Romberg



Boucle sur J. Condition d'arrêt sur $R(J, J)$.

Intégration - Romberg

A chaque itération, les points (x_i, y_i) sont insérés entre les points de l'itération précédente (Nb. points : $1 + 2^i$)



Intégration - Gauss

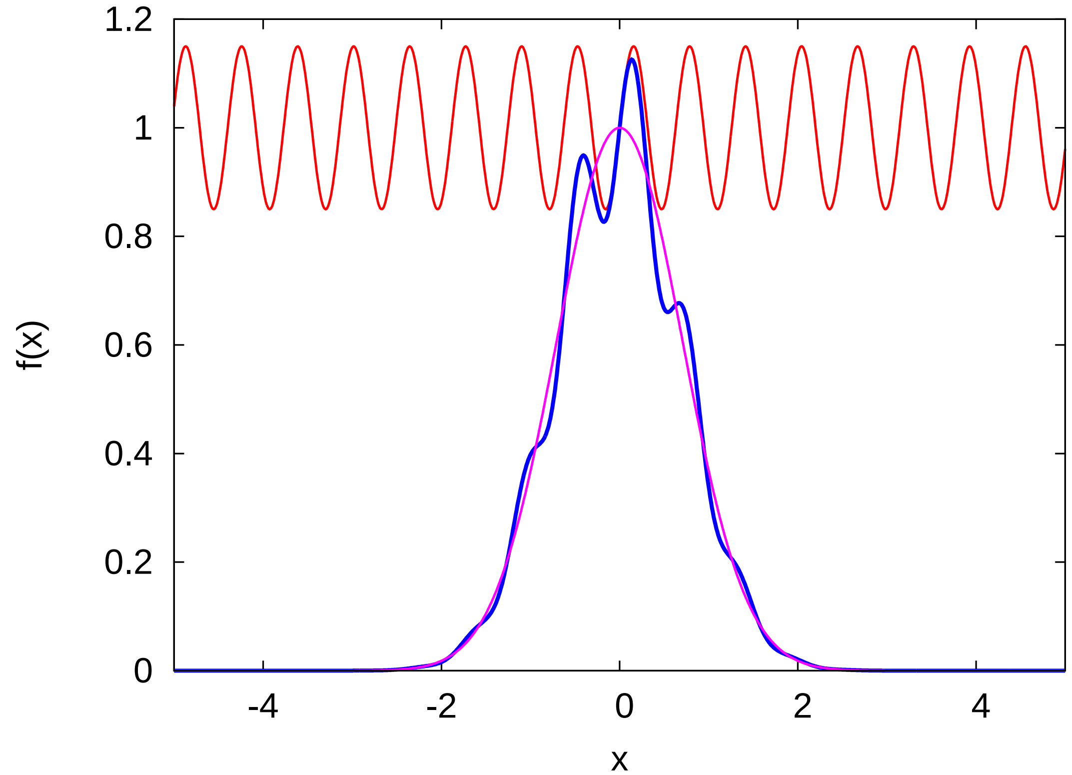
Cas particulier :

$$S = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_i\, f(x_i)$$

Le choix de (x_i, ω_i) dépend de la fonction $g(x)$ (qui n'apparaît **pas** dans la somme !)

$[a, b]$	$g(x)$	Nom
$[-1, 1]$	1	Legendre
$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Tchebychev
$\mathbb{R}^+$	e^{-x}	Laguerre
$\mathbb{R}$	e^{-x^2}	Hermite

Intégration - Gauss



Type	n	S	n	S
G-H	5	1.772453850905400		
R	5	1.601053096994874	257	1.772453850820082
T	5	3.000740458824521	257	1.772453850905516

Équations différentielles ordinaires

- Peut toujours se mettre sous la forme (X et F : vecteurs de taille n) :

$$\dot{X} = F(X)\,; \qquad X(0) = X_0$$

Équations différentielles ordinaires

- Peut toujours se mettre sous la forme (X et F : vecteurs de taille n) :

$$\dot{X} = F(X)\,; \qquad X(0) = X_0$$

- On discrétise le temps : $t_i = t_{i-1} + h_i$ (h_i pas forcément constants) $\Rightarrow X^{(i)} = X(t_i)$.

Équations différentielles ordinaires

- Peut toujours se mettre sous la forme (X et F : vecteurs de taille n) :

$$\dot{X} = F(X)\,; \qquad X(0) = X_0$$

- On discrétise le temps : $t_i = t_{i-1} + h_i$ (h_i pas forcément constants) $\Rightarrow X^{(i)} = X(t_i)$.
- Deux types de méthodes :
  - A pas liés (la famille Adams, Gear, etc...) : utilise $X^{(i)}$, $X^{(i-1)}$, ...
  - A pas libre (Runge-Kutta, etc...) : utilise seulement $X^{(i)}$.

Équations différentielles ordinaires

- Peut toujours se mettre sous la forme (X et F : vecteurs de taille n) :

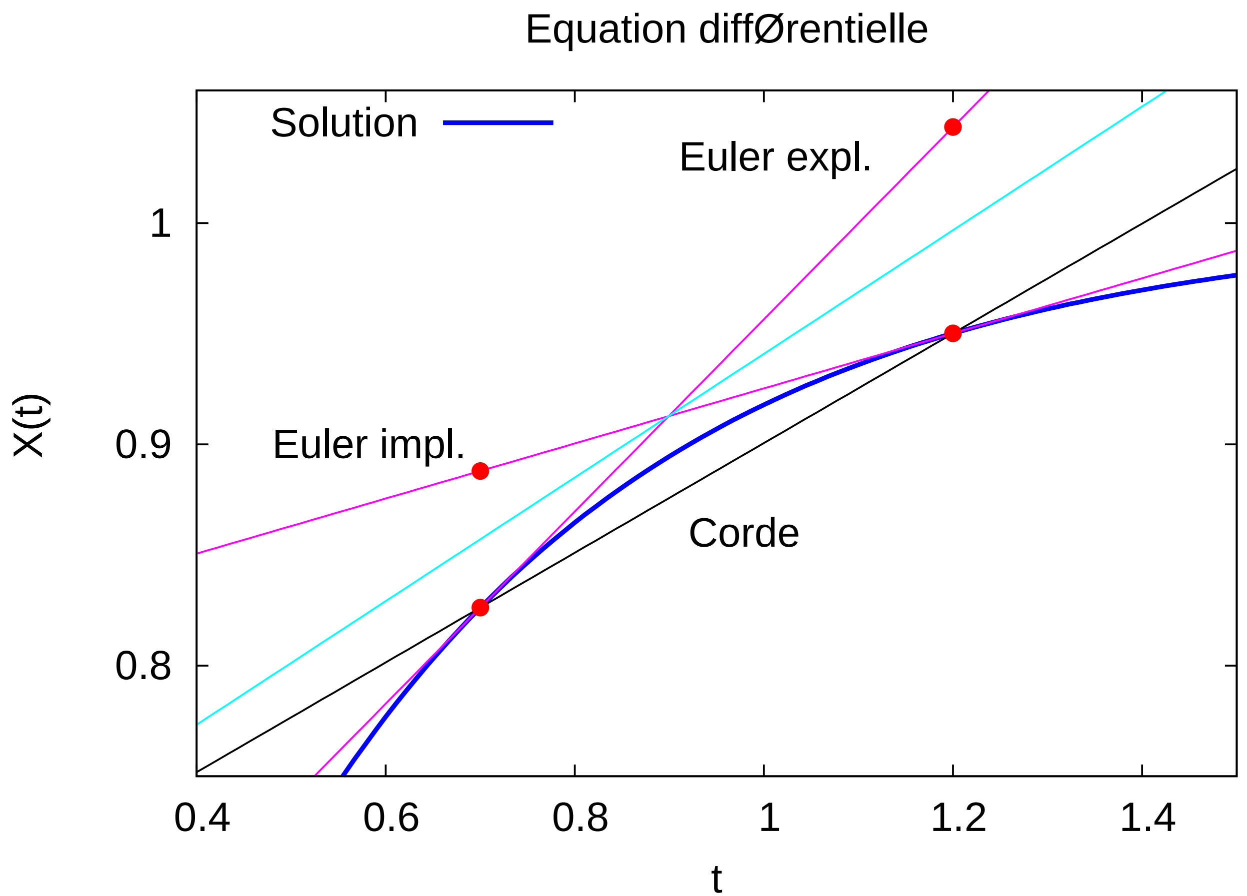
$$\dot{X} = F(X)\,; \qquad X(0) = X_0$$

- On discrétise le temps : $t_i = t_{i-1} + h_i$ (h_i pas forcément constants) $\Rightarrow X^{(i)} = X(t_i)$.
- Deux types de méthodes :
  - A pas liés (la famille Adams, Gear, etc...) : utilise $X^{(i)}$, $X^{(i-1)}$, ...
  - A pas libre (Runge-Kutta, etc...) : utilise seulement $X^{(i)}$.
- Ne **jamais** utiliser Euler ! ! !

$$X^{(i+1)} \neq X^{(i)} + h_i\, F(X^{(i)})$$

Équations différentielles ordinaires

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + h_i \times \alpha$$



α : pente de la corde entre $X^{(i)}$ et $X^{(i+1)}$.

Runge-Kutta

- RK2 : méthode de type “prédicteur-correcteur” :

$$\hat{X}^{(i+1)} \sim X^{(i)} + h_i \, F\left(X^{(i)}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(F\left(X^{(i)}\right) + F\left(\hat{X}^{(i+1)}\right)\right)$$

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \frac{h_i}{2}\left[F\left(X^{(i)}\right) + F\left(\hat{X}^{(i+1)}\right)\right] + o\left(h_i^3\right)$$

Runge-Kutta

- RK2 : méthode de type “prédicteur-correcteur” :

$$\hat{X}^{(i+1)} \sim X^{(i)} + h_i\, F\left(X^{(i)}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(F\left(X^{(i)}\right) + F\left(\hat{X}^{(i+1)}\right)\right)$$

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \frac{h_i}{2}\left[F\left(X^{(i)}\right) + F\left(\hat{X}^{(i+1)}\right)\right] + o\left(h_i^3\right)$$

- RK4 :

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + h_i\,\frac{1}{6}\,\left[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right] + o\left(h_i^5\right)$$

$$F_1 = F\left(t_i, X^{(i)}\right)\,;\; F_2 = F\left(t_i + \tfrac{h_i}{2}, X^{(i)} + \tfrac{h_i}{2}F_1\right)$$
$$F_3 = F\left(t_i + \tfrac{h_i}{2}, X^{(i)} + \tfrac{h_i}{2}F_2\right)\,;\; F_4 = F\left(t_i + h_i, X^{(i)} + h_iF_3\right)$$

Pas adaptatif

- 1 pas de taille h :

$$X_a^{(i+1)} = X^{(i)} + h\,\Delta_a + C\,h^5$$

- 2 pas de taille $\frac{h}{2}$:

$$X^{(i+1/2)} = X^{(i)} + \frac{h}{2}\,\Delta_b^{(1)} + C\left(\frac{h}{2}\right)^5$$

$$X_b^{(i+1)} = X^{(i+1/2)} + \frac{h}{2}\,\Delta_b^{(2)} + C\left(\frac{h}{2}\right)^5$$

$$X_b^{(i+1)} = X^{(i)} + \frac{h}{2}\left(\Delta_b^{(1)} + \Delta_b^{(2)}\right) + C\,\frac{1}{2^4}\,h^5$$

- Erreur estimée :

$$E = \left|X_b^{(i+1)} - X_a^{(i+1)}\right| \simeq C\,h^5$$

Pas adaptatif

- On choisi a priori l'erreur relative souhaitée ϵ.
- Erreur absolue visée :

$$E_0 \simeq C\, h_0^5 \simeq \epsilon \left(|X_b| + h\, |F(X_b)|\right)$$

- Pas optimal

$$h_0 = 0.95\, h \left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/5}$$

- Si $E > E_0$:

$$h \leftarrow h_0\,; \quad \text{refaire}$$

- Si $E < E_0$:

$$X^{(i+1)} = \frac{2^4 X_b^{(i+1)} - X_a^{(i+1)}}{2^4 - 1}\,; \quad h \leftarrow h_0\,; \quad \text{continuer}$$