Analyse Numérique - 4

Jacques Le Bourlot
Observatoire de Paris & Université Paris-Diderot

13 Janvier 2014

Équations à conditions aux limites

- Sur n EDO, on a p conditions initiales $\bar{X}_j^0$, $j = 1, p$ et $n - p$ conditions finales $\bar{X}_i^f$, $i = p + 1, n$.

Équations à conditions aux limites

- Sur n EDO, on a p conditions initiales $\bar{X}_j^0$, $j = 1, p$ et $n - p$ conditions finales $\bar{X}_i^f$, $i = p + 1, n$.
- (Au moins) trois types de méthodes :
  - Shooting (Tir).
  - Différences-finies/Relaxation.
  - Méthodes spectrales.

Équations à conditions aux limites

- Sur n EDO, on a p conditions initiales $\bar{X}_j^0$, $j = 1, p$ et $n - p$ conditions finales $\bar{X}_i^f$, $i = p + 1, n$.
- (Au moins) trois types de méthodes :
  - Shooting (Tir).
  - Différences-finies/Relaxation.
  - Méthodes spectrales.
- C'est en général beaucoup plus difficile qu'un système d'EDO à conditions initiales.

Shooting (Tir)

- On choisi $n - p$ conditions initiales et on calcule :

$$E\left(\bar{X}_i^0\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \left| X_i^f - \bar{X}_i^f \right|$$

Shooting (Tir)

- On choisi $n-p$ conditions initiales et on calcule :

$$E\left(\bar{X}_i^0\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \left| X_i^f - \bar{X}_i^f \right|$$

- L'écart entre condition finale recherchée $\bar{X}_i^f$ et condition finale effectivement atteinte X_i^f est une fonction des conditions initiales inconnues choisies $\bar{X}_i^0$.

Shooting (Tir)

- On choisi $n - p$ conditions initiales et on calcule :

$$E\left(\bar{X}_i^0\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \left| X_i^f - \bar{X}_i^f \right|$$

- L'écart entre condition finale recherchée $\bar{X}_i^f$ et condition finale effectivement atteinte X_i^f est une fonction des conditions initiales inconnues choisies $\bar{X}_i^0$.
- On cherche à faire tendre cet écart vers 0. C'est une recherche de 0, typiquement résolue par Newton-Raphson.

Shooting (Tir)

- On choisi $n-p$ conditions initiales et on calcule :

$$E\left(\bar{X}_i^0\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \left| X_i^f - \bar{X}_i^f \right|$$

- L'écart entre condition finale recherchée $\bar{X}_i^f$ et condition finale effectivement atteinte X_i^f est une fonction des conditions initiales inconnues choisies $\bar{X}_i^0$.
- On cherche à faire tendre cet écart vers 0. C'est une recherche de 0, typiquement résolue par Newton-Raphson.
- Le calcul du Jacobien de E n'est pas analytique !

Shooting (Tir)

- On choisi $n - p$ conditions initiales et on calcule :

$$E\left(\bar{X}_i^0\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \left| X_i^f - \bar{X}_i^f \right|$$

- L'écart entre condition finale recherchée $\bar{X}_i^f$ et condition finale effectivement atteinte X_i^f est une fonction des conditions initiales inconnues choisies $\bar{X}_i^0$.
- On cherche à faire tendre cet écart vers 0. C'est une recherche de 0, typiquement résolue par Newton-Raphson.
- Le calcul du Jacobien de E n'est pas analytique !
- Pour calculer **une** valeur de E il faut résoudre un système d'EDO (par RK4 par exemple).

Relaxation

- $[t_0, t_f]$ est divisé en K sub-intervalles $(k = 0, K)$; on utilise une approximation de la dérivée en k :

$$\frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k-1)}}{2h} = F_i\left(X^{(k)}\right)$$

Relaxation

- $[t_0, t_f]$ est divisé en K sub-intervalles $(k = 0, K)$; on utilise une approximation de la dérivée en k :

$$\frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k-1)}}{2h} = F_i\left(X^{(k)}\right)$$

- On initialise le vecteur $X^{(k)}$ et on l'utilise pour résoudre ce système linéaire. L'algorithme est itératif.

Relaxation

- $[t_0, t_f]$ est divisé en K sub-intervalles $(k = 0, K)$; on utilise une approximation de la dérivée en k :

$$\frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k-1)}}{2h} = F_i\left(X^{(k)}\right)$$

- On initialise le vecteur $X^{(k)}$ et on l'utilise pour résoudre ce système linéaire. L'algorithme est itératif.
- Dépend de façon cruciale du choix initial (basé sur la physique du problème).

Relaxation

- $[t_0, t_f]$ est divisé en K sub-intervalles $(k = 0, K)$; on utilise une approximation de la dérivée en k :

$$\frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k-1)}}{2h} = F_i\left(X^{(k)}\right)$$

- On initialise le vecteur $X^{(k)}$ et on l'utilise pour résoudre ce système linéaire. L'algorithme est itératif.
- Dépend de façon cruciale du choix initial (basé sur la physique du problème).
- Plus efficace si EDO du second ordre, en utilisant :

$$X" = \frac{X^{(k+1)} - 2X^{(k)} + X^{(k-1)}}{2h}$$

Relaxation

- $[t_0, t_f]$ est divisé en K sub-intervalles $(k = 0, K)$; on utilise une approximation de la dérivée en k :

$$\frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k-1)}}{2h} = F_i\left(X^{(k)}\right)$$

- On initialise le vecteur $X^{(k)}$ et on l'utilise pour résoudre ce système linéaire. L'algorithme est itératif.
- Dépend de façon cruciale du choix initial (basé sur la physique du problème).
- Plus efficace si EDO du second ordre, en utilisant :

$$X" = \frac{X^{(k+1)} - 2X^{(k)} + X^{(k-1)}}{2h}$$

- Difficulté avec les limites (on perd un ordre dans les DF).

Spectrale

- Si la forme de l'EDO s'y prête, on choisi une base de fonctions $\phi_k(t)$ (infinie) adaptée, et on écrit :

$$X_i(t) = \sum_k a_{ik}\, \phi_k(t)$$

Spectrale

- Si la forme de l'EDO s'y prête, on choisi une base de fonctions $\phi_k(t)$ (infinie) adaptée, et on écrit :

$$X_i(t) = \sum_k a_{ik}\, \phi_k(t)$$

- On remplace dans l'EDO. Après troncature, on obtient un système dont les inconnues sont les coefficients a_{ik}.

Spectrale

- Si la forme de l'EDO s'y prête, on choisi une base de fonctions $\phi_k(t)$ (infinie) adaptée, et on écrit :

$$X_i(t) = \sum_k a_{ik}\, \phi_k(t)$$

- On remplace dans l'EDO. Après troncature, on obtient un système dont les inconnues sont les coefficients a_{ik}.
- Problème du choix de l'ordre de troncature.

Spectrale

- Si la forme de l'EDO s'y prête, on choisi une base de fonctions $\phi_k(t)$ (infinie) adaptée, et on écrit :

$$X_i(t) = \sum_k a_{ik}\, \phi_k(t)$$

- On remplace dans l'EDO. Après troncature, on obtient un système dont les inconnues sont les coefficients a_{ik}.
- Problème du choix de l'ordre de troncature.
- Si les ϕ_k ne sont pas adaptés : horrible !

Spectrale

- Si la forme de l'EDO s'y prête, on choisi une base de fonctions $\phi_k(t)$ (infinie) adaptée, et on écrit :

$$X_i(t) = \sum_k a_{ik}\,\phi_k(t)$$

- On remplace dans l'EDO. Après troncature, on obtient un système dont les inconnues sont les coefficients a_{ik}.
- Problème du choix de l'ordre de troncature.
- Si les ϕ_k ne sont pas adaptés : horrible !
- Parmi les choix possibles :
  - Polynômes orthogonaux.
  - Fonctions trigonométriques (analogue à résoudre dans l'espace de Fourier, d'où le nom).

Exemple

- Tir au canon :
  - Vitesse initiale V_0, masse M.
  - Distance de la cible : L.
  - Frottement fluide : $\overrightarrow{f} = -\gamma\, v^\alpha \, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$

Quel doit être l'angle de tir ?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_0 & = & X_2 \\ \dot{X}_1 & = & X_3 \\ \dot{X}_2 & = & -\frac{\gamma}{M}\, X_2 \, \left[X_2^2 + X_3^2\right]^{\frac{\alpha-1}{1}} \\ \dot{X}_3 & = & -g - \frac{\gamma}{M}\, X_3 \, \left[X_2^2 + X_3^2\right]^{\frac{\alpha-1}{1}} \end{array} \right.$$

Exemple

- Conditions initiales :

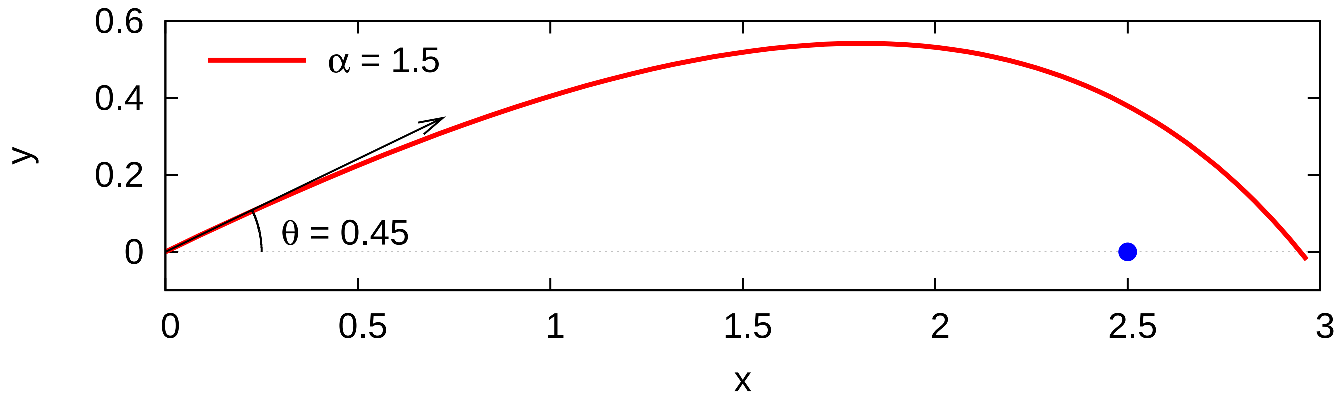
$$\left\{\begin{array}{lcl} X_0(0) & = & 0 \\ X_1(0) & = & 0 \\ X_2(0) & = & V_0 \cos\theta \\ X_3(0) & = & V_0 \sin\theta \end{array}\right.$$

- On Choisi un θ
- On intègre jusqu'à ce que $y_\theta(t_f) = X_1(t_f) = 0$

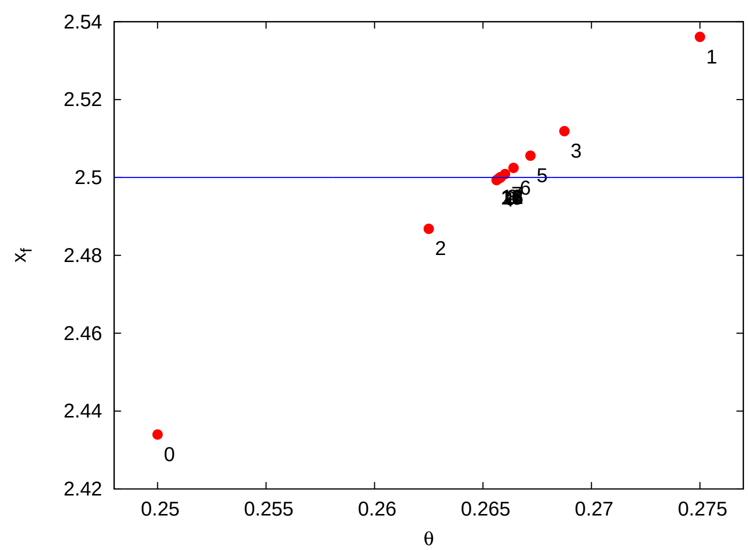
$$E(\theta) = x_\theta(t_f) - L$$

- On résoud $E(\theta) = 0$

Exemple



0.6
0.4
0.2
0
y
α = 1.5
θ = 0.45
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x



2.54
2.52
2.5
2.48
2.46
2.44
2.42
x_f
0.25
0.255
0.26
0.265
0.27
0.275
θ
0
1
2
3
5
6

Équations aux dérivées partielles

- Il y a **deux** variables libres (au moins). Disons x et t.

Équations aux dérivées partielles

- Il y a **deux** variables libres (au moins). Disons x et t.
- Souvent, la fonction inconnue $\phi(x,t)$ obéit à une équation du type :

$$A\,\phi_{xx} + B\,\phi_{xt} + C\,\phi_{tt} = F(x,t,\phi,\phi_x,\phi_t)$$

Équations aux dérivées partielles

- Il y a **deux** variables libres (au moins). Disons x et t.
- Souvent, la fonction inconnue $\phi(x,t)$ obéit à une équation du type :

$$A\,\phi_{xx} + B\,\phi_{xt} + C\,\phi_{tt} = F(x,t,\phi,\phi_x,\phi_t)$$

- On classe traditionnellement ces équations linéaires par rapport aux termes d'ordre 2 en 3 catégories :
  - $B^2 - 4AC < 0$: EDP Elliptique
  - $B^2 - 4AC = 0$: EDP parabolique
  - $B^2 - 4AC > 0$: EDP Hyperbolique

Équations aux dérivées partielles

- Il y a **deux** variables libres (au moins). Disons x et t.
- Souvent, la fonction inconnue $\phi(x,t)$ obéit à une équation du type :

$$A\,\phi_{xx} + B\,\phi_{xt} + C\,\phi_{tt} = F(x,t,\phi,\phi_x,\phi_t)$$

- On classe traditionnellement ces équations linéaires par rapport aux termes d'ordre 2 en 3 catégories :
  - ✦ $B^2 - 4AC < 0$: EDP Elliptique
  - ✦ $B^2 - 4AC = 0$: EDP parabolique
  - ✦ $B^2 - 4AC > 0$: EDP Hyperbolique
- Les méthodes de choix pour résoudre les EDP sont les méthodes d'Eléments Finis (hors programme ici), de différences finies ou spectrales.

EDP Hyperbolique

L'exemple type est l'équation d'onde :

$$\phi_{tt} - c^2\,\phi_{xx} = 0$$

Où $x \in [0, x_m]$, $t \in [0, t_m]$, et les conditions aux limites sont (par exemple) :

$$\phi(0,t) = 0\,; \quad \phi(x_m, t) = 0 \qquad \forall t$$

$$\phi(x,0) = f(x) \qquad \forall x$$

$$\phi'(x,0) = g(x) \qquad x \in]0, x_m[$$

Elle peut se résoudre par différences finies, mais pose des problèmes de démarrage et de stabilité.

EDP Elliptique

L'exemple type est l'équation de Poisson (Laplace si $g(x, y) = 0$) :

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = g(x, y)$$

Avec des conditions imposées sur les bords du domaine (x, y).
Là aussi les méthodes de différences finies peuvent s'appliquer.

EDP Parabolique

L'exemple type est l'équation de diffusion :

$$\phi_t = D\,\phi_{xx}$$

Où $x \in [0, x_m]$, $t \in [0, t_m]$, et les conditions initiales et aux limites sont :

$$\phi(x,0) = f(x) \qquad \forall x$$

$$\phi(0,t) = g_1(x) \qquad \forall t$$

$$\phi(x_m,t) = g_2(x) \qquad \forall t$$

- L'algorithme de choix est l'algorithme de Crank-Nicholson (une méthode de différence finie semi-implicite).
- Les méthodes spectrales sont aussi très bonnes.

Systèmes différentiels (suite)

Équations aux dérivées partielles

❖ EDP

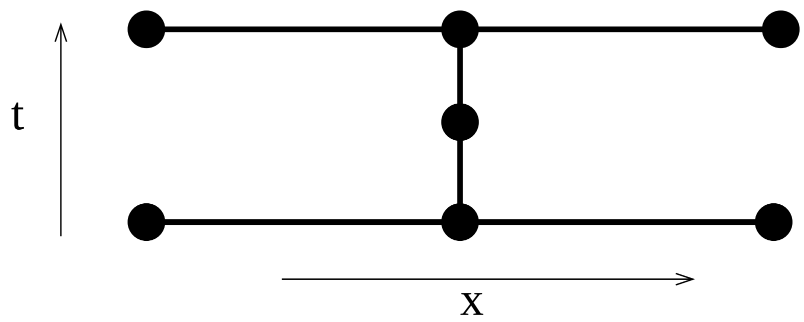
❖ Crank-Nicholson

❖ Spectrale

Crank-Nicholson

Soit à résoudre :

$$\phi_t = D\,\phi_{xx} + F(\phi)$$



La méthode est “semi-implicite” (explicite en espace et implicite en temps). F est un terme quelconque, pouvant être non-linéaire.

Crank-Nicholson

Dérivée seconde d'espace (différence finie en i) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}^{i-\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{i,j} - \phi^{i-1,j}}{h} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x}^{i+\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{i+1,j} - \phi^{i,j}}{h}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}^{i+\frac{1}{2}} - \frac{\partial \phi}{\partial x}^{i-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\phi^{i-1,j} - 2\,\phi^{i,j} + \phi^{i+1,j}}{h^2}$$

Crank-Nicholson

Dérivée seconde d'espace (différence finie en i) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}^{i-\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{i,j} - \phi^{i-1,j}}{h} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x}^{i+\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{i+1,j} - \phi^{i,j}}{h}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}^{i+\frac{1}{2}} - \frac{\partial \phi}{\partial x}^{i-\frac{1}{2}} \right) = \frac{\phi^{i-1,j} - 2\,\phi^{i,j} + \phi^{i+1,j}}{h^2}$$

Dérivée première temporelle (différence finie en $j + \frac{1}{2}$) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}^{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{i,j+1} - \phi^{i,j}}{k}$$

Crank-Nicholson

En $(i, j + \frac{1}{2})$:

$$\frac{\phi^{i,j+1} - \phi^{i,j}}{k} = F(\phi^{i,j+\frac{1}{2}})$$

$$+\frac{D}{2}\left[\frac{\phi^{i-1,j+1} - 2\phi^{i,j+1} + \phi^{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{\phi^{i-1,j} - 2\phi^{i,j} + \phi^{i+1,j}}{h^2}\right]$$

Crank-Nicholson

En $(i, j + \frac{1}{2})$:

$$\frac{\phi^{i,j+1} - \phi^{i,j}}{k} = F(\phi^{i,j+\frac{1}{2}})$$

$$+\frac{D}{2}\left[\frac{\phi^{i-1,j+1} - 2\phi^{i,j+1} + \phi^{i+1,j+1}}{h^2} + \frac{\phi^{i-1,j} - 2\phi^{i,j} + \phi^{i+1,j}}{h^2}\right]$$

D'où :

$$-r\,\phi^{i-1,j+1} + (1+2r)\,\phi^{i,j+1} - r\,\phi^{i+1,j+1}$$

$$= k\,F(\phi^{i,j}) + r\,\phi^{i-1,j} + (1-2r)\,\phi^{i,j} + r\,\phi^{i+1,j}$$

$$r = \frac{k\,D}{2\,h^2} < \frac{1}{2} \qquad \text{(Courant)}$$

Crank-Nicholson

$$\begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & -r \\ -r & 1+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \\ \vdots \\ \phi^n \end{pmatrix}^{j+1}$$

$$= k \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & r \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1-2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \\ \vdots \\ \phi^n \end{pmatrix}^{j}$$

$$\mathbf{A}\,\phi^{(j+1)} = \mathrm{F}\left(\phi^{(\mathrm{j})}\right) + \mathbf{B}\,\phi^{(j)}$$

Méthode Spectrale

$$\phi_t - D\,\phi_{xx} = F(\phi)$$

$$\phi(t,0) = \phi(t,\pi\,L) = 0; \quad \phi(0,x) = f(x)$$

Méthode Spectrale

$$\phi_t - D\,\phi_{xx} = F(\phi)$$

$$\phi(t,0) = \phi(t,\pi\,L) = 0; \quad \phi(0,x) = f(x)$$

On pose :

$$\phi(t,x) = A(t)\,U(x); \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = A'(t)\,U(x); \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = A(t)\,U"(x)$$

Méthode Spectrale

$$\phi_t - D\,\phi_{xx} = F(\phi)$$

$$\phi(t,0) = \phi(t,\pi\,L) = 0; \quad \phi(0,x) = f(x)$$

On pose :

$$\phi(t,x) = A(t)\,U(x); \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = A'(t)\,U(x); \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = A(t)\,U"(x)$$

Equation homogène (sans F) :

$$\frac{A'(t)}{D\,A(t)} = \frac{U"(x)}{U(x)} = -k^2 \qquad \forall t,\, \forall x$$

Méthode Spectrale

$$\phi_t - D\,\phi_{xx} = F(\phi)$$

$$\phi(t,0) = \phi(t,\pi\,L) = 0; \quad \phi(0,x) = f(x)$$

On pose :

$$\phi(t,x) = A(t)\,U(x); \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = A'(t)\,U(x); \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = A(t)\,U"(x)$$

Equation homogène (sans F) :

$$\frac{A'(t)}{D\,A(t)} = \frac{U"(x)}{U(x)} = -k^2 \qquad \forall t,\, \forall x$$

Donc infinité de $U_n(x)$ telles que ($k_n\,\pi\,L = n\,\pi$) :

$$U_n(x) \propto \sin\left(\frac{n}{L}\,x\right)$$

Méthode Spectrale

Si $F = 0$:

$$A(t) = A_0 \exp\left(-Dk^2 t\right)$$

$$\phi(t,x) = \sum_n \alpha_n \exp\left(-D\frac{n^2}{L^2}\,t\right)\,\sin\left(\frac{n}{L}\,x\right)$$

Méthode Spectrale

Si $F = 0$:

$$A(t) = A_0 \exp\left(-Dk^2 t\right)$$

$$\phi(t,x) = \sum_n \alpha_n \exp\left(-D\frac{n^2}{L^2}\,t\right) \sin\left(\frac{n}{L}\,x\right)$$

On détermine les α_n par :

$$\phi(0,x_i) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \sin\left(\frac{n}{L}\,x_i\right) = f(x_i)$$

$$x_i = i\,\frac{L}{N} \qquad i \in [0,N] \quad n \in [0,N]$$

Système de $N+1$ équations linéaires à $N+1$ inconnues.

Méthode Spectrale

Si $F \neq 0$:

$$\phi(t,x) = \sum_n \alpha_n(t) \sin\left(\frac{n}{L}x\right)$$

$$F\left(\phi(t,x)\right) = \sum_n \beta_n(t) \sin\left(\frac{n}{L}x\right)$$

Méthode Spectrale

Si $F \neq 0$:

$$\phi(t,x) = \sum_n \alpha_n(t) \sin\left(\frac{n}{L}x\right)$$

$$F\left(\phi(t,x)\right) = \sum_n \beta_n(t) \sin\left(\frac{n}{L}x\right)$$

$$\sum_n \left[\alpha_n'(t) + \frac{D\,n^2}{L^2}\alpha_n(t) - \beta_n(t)\right] \sin\left(\frac{n}{L}x\right) = 0$$

Méthode Spectrale

Si $F \neq 0$:

$$\phi(t,x) = \sum_n \alpha_n(t) \sin\left(\frac{n}{L}x\right)$$

$$F\left(\phi(t,x)\right) = \sum_n \beta_n(t) \sin\left(\frac{n}{L}x\right)$$

$$\sum_n \left[\alpha_n'(t) + \frac{D\,n^2}{L^2}\alpha_n(t) - \beta_n(t)\right] \sin\left(\frac{n}{L}x\right) = 0$$

Système de $N+1$ EDO telles que ($n \in [0,N]$) :

$$\alpha_n'(t) = \beta_n(t) - \frac{D\,n^2}{L^2}\alpha_n(t)$$

Lourd s'il faut refaire la décomposition en série de Fourier de F à chaque itération.