M2Pro - OSAE 25 février 2009

Examen d'Analyse Numérique

Soyez précis dans les justifications de chaque étape des calculs. Les figures sont à envoyer à Jacques.Lebourlot@obspm.fr. Elles doivent obligatoirement être nommées "NOM_P_i.eps", où "NOM" est votre nom, "P" est l'initiale de votre prénom, et "i" le numéro de la figure.

1 Calcul Matriciel

Soit la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

On prendra $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$.

1. En utilisant votre algorithme de résolution de systèmes linéaires, calculer la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$.
2. Comparer $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^{-1}$. Commenter. Ce résultat était-il prévisible ?
3. En utilisant comme norme matricielle $\|\mathbf{A}\| = \max_{ij}\left(|A_{ij}|\right)$, estimer le nombre de conditionnement de $\mathbf{A}$.

2 Équations différentielles

On étudie le système différentiel suivant[1] :

$$\begin{cases} \dot{X}_0 &= X_1 \\ \dot{X}_1 &= -p_1\,X_1 - \sin\left(X_0\right) + p_2\,\cos\left(X_2\right) \\ \dot{X}_2 &= p_3 \end{cases}$$

p_1, p_2, p_3 sont 3 paramètres. p_1 sera varié au cours du problème. Pour les deux autres, on prendra :

$$P_2 = 3.11\,; \quad p_3 = 1.0$$

On prendra comme conditions initiales :

$$X_0^0 = 0.0\,; \quad X_1^0 = 1.0\,; \quad X_2^0 = 0.0$$

[1] Il correspond à un pendule pesant amorti et forcé.

1. On prend $p_1 = 0.7$.
   (a) Résoudre numériquement le système. Expliciter le choix du temps total d'intégration T_{tot}, du pas de temps dt et de la précision ϵ.
   (b) Tracer le diagramme de phase 2D (projection sur le plan (X_0, X_1)) correspondant au régime permanent du système (figure "NOM_P_1.eps").
   (c) Quelle est la durée du transitoire ? Justifiez votre réponse.
2. Mêmes questions pour $p_1 = 0.714$. (figure "NOM_P_2.eps").
3. On va maintenant étudier l'influence des conditions initiales, toujours pour $p_1 = 0.714$. Par rapport au cas de référence $X_0^0 = 0.0$, on considère les conditions initiales $X_0^i = 10^{-i}$ avec $i \in [3, 10]$; X_1^0 et X_2^0 ne sont pas modifiés. Déterminer au bout de quel temps d'intégration t_i l'écart **relatif** entre la solution de référence et la solution perturbée s'écartent durablement de plus de 10^{-2}. Expliquer soigneusement comment ce temps est évalué, et quelles difficultés cela comporte.
4. Tracer la courbe donnant $t_i = f(X_0^i)$ (figure NOM_P_3.eps).
5. Déterminer une loi empirique à deux paramètres a et b permettant d'ajuster raisonnablement ces résultats, et déterminer ces paramètres par un fit à l'aide de gnuplot. Justifier le choix de la forme analytique choisie.